Y

Yarıçap : Çemberin merkezini herhangi bir noktasına birleştiren doğru parçası.

Yarı doğru : Doğruda ayırma noktasının herhangi bir yanındaki noktaların oluşturduğu küme.

Yarı düzlem : Düzlemde ayırma doğrusunun herhangi bir yanındaki noktaların oluşturduğu küme.

Yatay : Durgun su yüzüne paralel ya da düşey doğrultuya dik olan.

Yarı uzay : Bir düzlemin herhangi bir yanındaki noktaların oluşturduğu küme.

Yükseklik (derinlik) : Dikdörtgenler prizmasında üç boyuttan biri.

Z

Zıt ışın : Başlangıç noktaları aynı olan iki ışının birleşimi bir doğru ise, bu ışınlara **zıt ışınlar** denir.

YENİ ORTAOKUL KİTAPLARI

MATEMATİK

ORTAOKUL—II

YAZANLAR

Süleyman ÖLÇEN Tahsin ÇİZENEL İsmail GÖKMEN

DEVLET KİTAPLARI

TÜRK TARİH KURUMU BASIMEVİ, ANKARA, 1978

« Her hakkı saklıdır ve Milli Eğitim Bakanlığına aittir. Kitabın metni, sorun ve şekilleri kısmen de olsa hiç bir surette alınıp yayınlanamaz. »

Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulunun 23. 5. 1978 tarih ve 195 sayılı kararıyle bastırılması uygun görülmüş, Yayımlar ve Basılı Eğitim Malzemeleri Genel Müdürlüğünün 2. 6. 1978 tarih ve 5413 sayılı emirleriyle 1. kez ve 500.00 adet basılmıştır.

İ Ç İ N D E K İ L E R

Sayfa

BİRİNCİ BÖLÜM

MATEMATİK SİSTEMLERİ

1–1. Yeni Bir Toplama Çeşidi **1–5**
ALIŞTIRMALAR 4
1–2. Yeni Bir Çarpma Çeşidi **6–10**
ALIŞTIRMALAR 9
1–3. İşlem ve Kapalılık **10–17**
1. İkili İşlem 10
2. Kapalılık 12
3. Değişme Özeliği 13
4. Birleşme Özeliği 14
5. Birli İşlem 15
ALIŞTIRMALAR 16
1–4. Etkisiz (Birim) Eleman, Bir Elemanın Tersi **17–23**
1. İkili İşleme Göre Etkisiz Eleman 17
2. İkili İşleme Göre Bir Elemanın Tersi 20
ALIŞTIRMALAR 22
1–5. Bir Matematik Sistemi Nedir? **23–28**
ALIŞTIRMALAR 27
1–6. Modüler Aritmetik **29–32**
Karışık Alıştırmalar 32
KENDİMİZİ DENEYELİM (Test) 36

İKİNCİ BÖLÜM

RASYONEL SAYILAR

2–1. Sayı Doğrusu **40–42**
ALIŞTIRMALAR 42
2–2. Yönlü Sayılar **42–56**
1. Yönlü Tamsayılar 42
ALIŞTIRMALAR 48
2. Yönlü Rasyonel Sayılar 49
3. Sayı Doğrusu ve Rasyonel Sayılar 50

		Sayfa
	ALIŞTIRMALAR	52
4.	Rasyonel Sayılar Kümesinde Sıralama	53
	ALIŞTIRMALAR	54
2–3.	**Rasyonel Sayılarla Toplama İşlemi**	**56–74**
1.	İki Tamsayının Toplamı	56
	ALIŞTIRMALAR	59
2.	İki Rasyonel Sayının Toplamı	60
3.	Rasyonel Sayılarda Toplama İşleminin Özelikleri	61
4.	İkiden Çok Rasyonel Sayının Toplaması	66
	Uygulamalar	67
	ALIŞTIRMALAR	71
	Okuma Parçası (Sayılarla İlgili)	73
2–4.	**Bir Noktanın Koordinatları**	**74–89**
1.	Yer Belirtme	74
2.	Bir Sinemada Yer Belirtme	75
3.	Karelerle Yer Belirtme	76
4.	Noktalarla, Karelerle, Oklarla Yer Belirtme	77
	ALIŞTIRMALAR	78
5.	Bir Doğru Üzerinde Bulunan Noktanın Koordinatı	80
	ALIŞTIRMALAR	83
6.	Düzlemde Bir Noktanın Koordinatları	84
7.	Koordinatları Bilinen Noktayı Bulmak	85
8.	Koordinat Eksenlerinin Düzlemden Ayırdığı Bölgeler	86
	ALIŞTIRMALAR	87
2–5.	**Grafikler**	**90–101**
	ALIŞTIRMALAR	100
	Okuma Parçası	101
2–6.	**Rasyonel Sayılar Kümesinde Çarpma İşlemi**	**102–113**
1.	İki Tamsayının Çarpması	102
2.	Rasyonel İki Sayının Çarpması	104
	Uygulamalar	104
	ALIŞTIRMALAR	105
3.	Çarpma İşleminin Özelikleri	106
	ALIŞTIRMALAR	112
2–7.	**Rasyonel Sayılar Kümesinde Bölme İşlemi**	**114–121**
1.	Bölme Kavramı	114
	Uygulamalar	118
2.	Bölme İşleminin Özelikleri	119
	ALIŞTIRMALAR	120

		Sayfa
2–8.	**Rasyonel Sayılar Kümesinde Çıkarma İşlemi**	**121–129**
1.	Çıkarma Kavramı	121
2.	Çıkarma İşleminin Özelikleri	123
3.	Rasyonel Sayıların Sayı Doğrusu Üzerinde Sıralanması	126
	ALIŞTIRMALAR	127
	Karışık Alıştırmalar	129
	KENDİMİZİ DENEYELİM (Test)	135

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

ORAN, ORANTI ve YÜZDELER

3–1.	**Oran ve Orantı**	**139–147**
1.	Oran Kavramı	139
	ALIŞTIRMALAR	142
2.	Orantı	143
3.	Orantının Özelikleri	144
	Uygulamalar	145
	ALIŞTIRMALAR	147
3–2.	**Yüzdeler**	**148–153**
1.	Yüzde Kavramı	148
	ALIŞTIRMALAR	150
2.	Bir Rasyonel Sayının Yüzde Olarak Gösterilmesi	151
3.	Komisyon	152
4.	İndirim (İskonto)	152
5.	Faiz	153
	Karışık Alıştırma ve Problemler	154
	KENDİMİZİ DENEYELİM (Test)	156

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

PARALEL DOĞRULAR
ÜÇGEN VE PARALELKENAR

4–1.	**Bir Düzlemde İki Doğru**	**159–164**
1.	Düzlemsel İki Doğrunun Durumları	159
2.	Komşu Açılar	160
3.	Komşu ve Bütünler Açısal Bölgeler	161
4.	Tersaçısal Bölgeler	161
5.	Dik Doğrular	162
6.	Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı	163
	ALIŞTIRMALAR	163

	Sayfa
r Düzlemdeki Üç Doğru	**165–166**
üzlemsel Üç Doğrunun Durumları	165
ki Doğrunun bir Kesenle Yaptığı Açılar	166
LIŞTIRMALAR	**166–174**
Paralel Doğrular	166
Paralellik Kavramı	167
Paralel İki Doğrunun Bir Kesenle Yaptığı Açılar	168
Önermeler	170
Karşıt Önermeler	172
ALIŞTIRMALAR	**175–186**
Üçgenler	175
Üçgen ve Elemanları	175
Kenarlarına Göre Üçgenlerin Çeşitleri	177
Üçgenin Kenarları Arasındaki Bağıntılar	179
Üçgenin Açıları Arasındaki Bağıntılar	180
Açılarına Göre Üçgenlerin Çeşitleri	180
İkizkenar Üçgenin Açıları	184
ALIŞTIRMALAR	**186–194**
5. Paralelkenar	186
1. Paraleller Şeridi	187
2. Çokgen	188
3. Paralelkenar	188
4. Paralelkenarın Özelikleri	190
ALIŞTIRMALAR	191
5. Eşkenar Dörtgen	192
6. Dikdörtgen	192
7. Kare	193
Uygulamalar	194
Karışık Alıştırmalar	196
KENDİMİZİ DENEYELİM (Test)	
BEŞİNCİ BÖLÜM	
ÇEMBER ve DAİRE	
5–1. Çember, Çemberin Çizimi, Çemberin Düzlemde Ayırdığı Bölgeler	**200–207**
1. İki Nokta Arasındaki Uzaklık	200
	201

	Sayfa
	201
3. Bir Doğru Parçasının Orta Noktası	201
4. Bir Düzlem İçindeki Noktaların Belli bir Noktaya Olan Uzaklıkları	202
5. Çemberin Belirtilmesi	203
6. Çemberin Çizimi	204
7. Çemberin İç Bölgesi	204
8. Çemberin Dış Bölgesi	205
9. Daire (Çembersel Bölge)	205
10. Eş (Eşölçülü) Çemberler	206
ALIŞTIRMALAR	**208–217**
5–2. Çember ve Doğru	208
1. Kiriş	208
2. Kirişin Temel Özeliği	209
3. Doğru ve Çemberin Birbirine Göre Durumları	211
Uygulamalar	214
ALIŞTIRMALAR	**218–220**
5–3. Çemberde Yaylar	218
1. Arada Olma	220
2. Yayın Uzunluğu	**221–223**
5–4. Merkez Açı	221
1. Merkez Açı Kavramı	221
2. Eş Yaylar	223
ALIŞTIRMALAR	**223–225**
5–5. Çemberin Çevresi	224
ALIŞTIRMALAR	**225–228**
5–6. Dairenin Alanı	226
Okuma Parçası (Arşimed)	226
Uygulamalar	227
ALIŞTIRMALAR	**229**
Karışık Problemler	**231–237**
5–7. Silindir, Alanı ve Hacmi	231
1. Silindir	232
2. Silindirin Yanal Yüzeyinin Alanı	234
Uygulamalar	235
3. Silindirin Hacmi	236
ALIŞTIRMALAR	237
KENDİMİZİ DENEYELİM (Test)	

	Sayfa
r Düzlemdeki Üç Doğru	**165–166**
üzlemsel Üç Doğrunun Durumları	165
ki Doğrunun bir Kesenle Yaptığı Açılar	166
LIŞTIRMALAR	**166–174**
Paralel Doğrular	166
Paralellik Kavramı	167
Paralel İki Doğrunun Bir Kesenle Yaptığı Açılar	168
Önermeler	170
Karşıt Önermeler	172
ALIŞTIRMALAR	**175–186**
Üçgenler	175
Üçgen ve Elemanları	175
Kenarlarına Göre Üçgenlerin Çeşitleri	177
Üçgenin Kenarları Arasındaki Bağıntılar	179
Üçgenin Açıları Arasındaki Bağıntılar	180
Açılarına Göre Üçgenlerin Çeşitleri	180
İkizkenar Üçgenin Açıları	184
ALIŞTIRMALAR	**186–194**
5. Paralelkenar	186
1. Paraleller Şeridi	187
2. Çokgen	188
3. Paralelkenar	188
4. Paralelkenarın Özelikleri	190
ALIŞTIRMALAR	191
5. Eşkenar Dörtgen	192
6. Dikdörtgen	192
7. Kare	193
Uygulamalar	194
Karışık Alıştırmalar	196
KENDİMİZİ DENEYELİM (Test)	
BEŞİNCİ BÖLÜM	
ÇEMBER ve DAİRE	
5–1. Çember, Çemberin Çizimi, Çemberin Düzlemde Ayırdığı Bölgeler	**200–207**
1. İki Nokta Arasındaki Uzaklık	200
	201

	Sayfa
3. Bir Doğru Parçasının Orta Noktası	201
4. Bir Düzlem İçindeki Noktaların Belli bir Noktaya Olan Uzaklıkları	201
5. Çemberin Belirtilmesi	202
6. Çemberin Çizimi	203
7. Çemberin İç Bölgesi	204
8. Çemberin Dış Bölgesi	204
9. Daire (Çembersel Bölge)	205
10. Eş (Eşölçülü) Çemberler	205
ALIŞTIRMALAR	206
5–2. Çember ve Doğru	**208–217**
1. Kiriş	208
2. Kirişin Temel Özeliği	208
3. Doğru ve Çemberin Birbirine Göre Durumları	209
Uygulamalar	211
ALIŞTIRMALAR	214
5–3. Çemberde Yaylar	**218–220**
1. Arada Olma	218
2. Yayın Uzunluğu	220
5–4. Merkez Açı	**221–223**
1. Merkez Açı Kavramı	221
2. Eş Yaylar	221
ALIŞTIRMALAR	223
5–5. Çemberin Çevresi	**223–225**
ALIŞTIRMALAR	224
5–6. Dairenin Alanı	**225–228**
Okuma Parçası (Arşimed)	226
Uygulamalar	226
ALIŞTIRMALAR	227
Karışık Problemler	**229**
5–7. Silindir, Alanı ve Hacmi	**231–237**
1. Silindir	231
2. Silindirin Yanal Yüzeyinin Alanı	232
Uygulamalar	234
3. Silindirin Hacmi	235
ALIŞTIRMALAR	236
KENDİMİZİ DENEYELİM (Test)	237

	Sayfa
r Düzlemdeki Üç Doğru	**165–166**
üzlemsel Üç Doğrunun Durumları	165
ki Doğrunun bir Kesenle Yaptığı Açılar	166
LIŞTIRMALAR	**166–174**
Paralel Doğrular	166
Paralellik Kavramı	167
Paralel İki Doğrunun Bir Kesenle Yaptığı Açılar	168
Önermeler	170
Karşıt Önermeler	172
ALIŞTIRMALAR	**175–186**
Üçgenler	175
Üçgen ve Elemanları	175
Kenarlarına Göre Üçgenlerin Çeşitleri	177
Üçgenin Kenarları Arasındaki Bağıntılar	179
Üçgenin Açıları Arasındaki Bağıntılar	180
Açılarına Göre Üçgenlerin Çeşitleri	180
İkizkenar Üçgenin Açıları	184
ALIŞTIRMALAR	**186–194**
5. Paralelkenar	186
1. Paraleller Şeridi	187
2. Çokgen	188
3. Paralelkenar	188
4. Paralelkenarın Özelikleri	190
ALIŞTIRMALAR	191
5. Eşkenar Dörtgen	192
6. Dikdörtgen	192
7. Kare	193
Uygulamalar	194
Karışık Alıştırmalar	196
KENDİMİZİ DENEYELİM (Test)	

BEŞİNCİ BÖLÜM

ÇEMBER ve DAİRE

5–1. Çember, Çemberin Çizimi, Çemberin Düzlemde Ayırdığı Bölgeler	**200–207**
1. İki Nokta Arasındaki Uzaklık	200
	201

	Sayfa
3. Bir Doğru Parçasının Orta Noktası	201
4. Bir Düzlem İçindeki Noktaların Belli bir Noktaya Olan Uzaklıkları	201
5. Çemberin Belirtilmesi	202
6. Çemberin Çizimi	203
7. Çemberin İç Bölgesi	204
8. Çemberin Dış Bölgesi	204
9. Daire (Çembersel Bölge)	205
10. Eş (Eşölçülü) Çemberler	205
ALIŞTIRMALAR	206
5–2. Çember ve Doğru	**208–217**
1. Kiriş	208
2. Kirişin Temel Özeliği	208
3. Doğru ve Çemberin Birbirine Göre Durumları	209
Uygulamalar	211
ALIŞTIRMALAR	214
5–3. Çemberde Yaylar	**218–220**
1. Arada Olma	218
2. Yayın Uzunluğu	220
5–4. Merkez Açı	**221–223**
1. Merkez Açı Kavramı	221
2. Eş Yaylar	221
ALIŞTIRMALAR	223
5–5. Çemberin Çevresi	**223–225**
ALIŞTIRMALAR	224
5–6. Dairenin Alanı	**225–228**
Okuma Parçası (Arşimed)	226
Uygulamalar	227
ALIŞTIRMALAR	**229**
Karışık Problemler	**231–237**
5–7. Silindir, Alanı ve Hacmi	231
1. Silindir	232
2. Silindirin Yanal Yüzeyinin Alanı	234
Uygulamalar	235
3. Silindirin Hacmi	236
ALIŞTIRMALAR	237
KENDİMİZİ DENEYELİM (Test)	

		Sayfa
4–2.	**Bir Düzlemdeki Üç Doğru**	**165–166**
1.	Düzlemsel Üç Doğrunun Durumları	165
2.	İki Doğrunun bir Kesenle Yaptığı Açılar	165
	ALIŞTIRMALAR	166
4–3.	**Paralel Doğrular**	**166–174**
1.	Paralellik Kavramı	166
2.	Paralel İki Doğrunun Bir Kesenle Yaptığı Açılar	167
3.	Önermeler	168
4.	Karşıt Önermeler	170
	ALIŞTIRMALAR	172
4–4.	**Üçgenler**	**175–186**
1.	Üçgen ve Elemanları	175
2.	Kenarlarına Göre Üçgenlerin Çeşitleri	175
3.	Üçgenin Kenarları Arasındaki Bağıntılar	177
4.	Üçgenin Açıları Arasındaki Bağıntılar	179
5.	Açılarına Göre Üçgenlerin Çeşitleri	180
6.	İkizkenar Üçgenin Açıları	180
	ALIŞTIRMALAR	184
4–5.	**Paralelkenar**	**186–194**
1.	Paraleller Şeridi	186
2.	Çokgen	187
3.	Paralelkenar	188
4.	Paralelkenarın Özelikleri	188
	ALIŞTIRMALAR	190
5.	Eşkenar Dörtgen	191
6.	Dikdörtgen	192
7.	Kare	192
	Uygulamalar	193
	Karışık Alıştırmalar	194
	KENDİMİZİ DENEYELİM (Test)	196

BEŞİNCİ BÖLÜM

ÇEMBER ve DAİRE

5–1.	**Çember, Çemberin Çizimi, Çemberin Düzlemde Ayırdığı Bölgeler**	**200–207**
1.	İki Nokta Arasındaki Uzaklık	200
2.	Arada Olma	201

		Sayfa
3.	Bir Doğru Parçasının Orta Noktası	201
4.	Bir Düzlem İçindeki Noktaların Belli bir Noktaya Olan Uzaklıkları	201
5.	Çemberin Belirtilmesi	202
6.	Çemberin Çizimi	203
7.	Çemberin İç Bölgesi	204
8.	Çemberin Dış Bölgesi	204
9.	Daire (Çembersel Bölge)	205
10.	Eş (Eşölçülü) Çemberler	205
	ALIŞTIRMALAR	206
5–2.	**Çember ve Doğru**	**208–217**
1.	Kiriş	208
2.	Kirişin Temel Özeliği	208
3.	Doğru ve Çemberin Birbirine Göre Durumları	209
	Uygulamalar	211
	ALIŞTIRMALAR	214
5–3.	**Çemberde Yaylar**	**218–220**
1.	Arada Olma	218
2.	Yayın Uzunluğu	220
5–4.	**Merkez Açı**	**221–223**
1.	Merkez Açı Kavramı	221
2.	Eş Yaylar	221
	ALIŞTIRMALAR	223
5–5.	**Çemberin Çevresi**	**223–225**
	ALIŞTIRMALAR	224
5–6.	**Dairenin Alanı**	**225–228**
	Okuma Parçası (Arşimed)	226
	Uygulamalar	226
	ALIŞTIRMALAR	227
	Karışık Problemler	**229**
5–7.	**Silindir, Alanı ve Hacmi**	**231–237**
1.	Silindir	231
2.	Silindirin Yanal Yüzeyinin Alanı	232
	Uygulamalar	234
3.	Silindirin Hacmi	235
	ALIŞTIRMALAR	236
	KENDİMİZİ DENEYELİM (Test)	237

Sayfa

ALTINCI BÖLÜM

DENKLEMLER

6–1. **Sayı İfadelerini Yazma** **242–247**
ALIŞTIRMALAR 246

6–2. **Sayı Önermelerini Yazma** **247–250**
Uygulamalar 248
ALIŞTIRMALAR 249

6–3. **Çözüm Kümesinin Bulunması** **250–257**
1. Açık Önerme 250
2. Denklem 251
3. Bir Denklemin Çözümü 252
ALIŞTIRMALAR 255

6–4. **Eşitsizliklerin Çözümü** **258–265**
1. Eşitsizlik Kavramı 258
Uygulamalar 259
2. Eşitsizliklerin Çözümü 260
Uygulamalar 261
ALIŞTIRMALAR 264

6–5. **İki Bilinmeyenli Sayı Önermeleri** **266–279**
1. İki Bilinmeyenli Denklemler 266
ALIŞTIRMALAR 273
2. İki Bilinmeyenli Eşitsizlikler 273
ALIŞTIRMALAR 278
KENDİMİZİ DENEYELİM (Test) 280

YEDİNCİ BÖLÜM

İSTATİSTİK VE GRAFİKLER

7–1. **İstatistik İçin Bilgi Nasıl Toplanır** **284–287**
Okuma Parçası (İstatistik Tarihi) 286

7–2. **Çeşitli Grafikler** **287–298**
1. Çizgi Grafiği 287
2. Çubuk (Sütun) Grafiği 291
ALIŞTIRMALAR 294
3. Daire Grafiği 295
4. Bir Grafiğin Özelikleri 297

Sayfa

5. Bir Grafiği Çizerken Göz önünde Tutulması Gerekli Olan Hususlar 297
ALIŞTIRMALAR 298

7–3. **Bilgilerin Özetlenmesi** **298–303**
1. Aritmetik Ortalama 298
2. Orta (Medyan) 299
3. Mod (Moda) 302

7–4. **Örnekleme** **303–309**
ALIŞTIRMALAR 305
Uygulamalar 307
KENDİMİZİ DENEYELİM (Test) 310

SEKİZİNCİ BÖLÜM

ÇOK BÜYÜK VE ÇOK KÜÇÜK SAYILAR

8–1. **Çok Büyük Sayıların Yazılması ve Okunması** **313–317**
1. 10 Sayısının Pozitif Güçleri 313
2. Çok Büyük Sayıları Bilimsel Biçimde Göstermek 314

8–2. **Çok Büyük Sayılarla Yapılan Dört İşlem** **318–323**
1. Toplama ve Çıkarma 318
2. Çarpma İşlemi 320
3. Bölme İşlemi 321
ALIŞTIRMALAR 322

8–3. **Çok Küçük Sayıların Yazılması ve Okunması** **324–327**
10 sayısının Negatif Güçleri 324
Uygulamalar 325

8–4. **Çok Küçük Sayılarla Yapılan Dört İşlem** **327–334**
1. Toplama ve Çıkarma 327
2. Çarpma İşlemi 328
3. Bölme İşlemi 329
ALIŞTIRMALAR 330
KENDİMİZİ DENEYELİM (Test) 331

Sözlük 337

İŞARETLER VE ANLAMLARI

1. $\{\ldots\}, \{x|\ldots\}$: **Küme** işaretidir. Bir kümeyi göstermeye yarar.
2. $\emptyset, \{\ \}$: **Boş küme** işaretidir.
3. $\in$: Bir nesnenin, kümenin **elemanı olduğunu** gösteren işaret.
4. $\notin$: Bir nesnenin, kümenin **elemanı olmadığını** gösteren işaret.
5. $\subset$: **Kapsanma** işareti;
   $A \subset B$: A kümesi B içinde kapsanır.
   $A \subset B$: A kümesi B nin küme parçasıdır.
6. $\supset$: **Kapsama** işareti;
   $A \supset B$: A kümesi B yi kapsar.
7. $\not\subset$: **Kapsanmama** işareti;
   $A \not\subset B$: A kümesi B içinde kapsanmaz.
8. $\not\supset$: **Kapsamama** işareti;
   $A \not\supset B$: A kümesi B yi kapsamaz.
9. $\cup$: Kümeler arasında **birleşim** işareti.
   $A \cup B$: A birleşim B.
10. $\cap$: Kümeler arasında **kesişim** işareti.
    $A \cap B$: A kesişim B.
11. $\longleftrightarrow$: **Birebir eşleme** işareti.
12. $\longmapsto$: **Eşleme** işareti.
13. $s(A)$: A kümesinin elemanlarının sayısını gösterir.
14. $=\ ;\ \neq$: **Eşit** işareti; **eşit olmama** işareti.
15. $\equiv$: **Denklik** işareti.
16. $\geqslant$: **Büyük** ya da **eşit olma** işareti.
17. $>$: **Büyük olma** işareti.
18. $\leqslant$: **Küçük** ya da **eşit olma** işareti.
19. $<$: **Küçük olma** işareti.
20. $\simeq$ ya da $\approx$: **Yaklaşık olarak eşit olma** işareti.
21. $\cong$: **Eşlik** işareti.
22. $//$: **Paralellik** işareti.
23. $\perp$: **Diklik** işareti.
24. $]AB$: AB yarıdoğrusu
25. $[AB$: AB ışını.
26. $[AB]$: AB doğru parçası
27. $]AB]$: A ucunda açık B ucunda kapalı doğru parçası.
28. $]AB[$: A ve B uçlarında açık doğru parçası.
29. $|AB|$: AB doğru parçasının uzunluğu.
30. $\overline{OA}$: Sayı doğrusu üzerinde O başlangıç noktasına göre A nın **koordinatı.**
31. $\widehat{AOB}$: AOB açısı.
32. $(A\widehat{O}B)$: AOB açısal bölgesi.

33. $s(\widehat{AOB})$: AOB açısının ölçümü, ("Açısal bölgenin ölçümü" yerine, kısaca, "açının ölçümü" diyoruz).

34. $\widehat{ABC}$: ABC üçgeni.

35. $\widehat{ABC}$: ABC üçgensel bölgesi.

36. $\overset{\frown}{AB}$: AB yayı (noktalar kümesi olarak)

37. $s(\overset{\frown}{AB})$: AB yayının ölçümü (derece olarak)

38. $|\overset{\frown}{AB}|$: AB yayınının uzunluğu.

39. $\Rightarrow$: **Bir yönlü gerektirme** işareti.
$A \Rightarrow B$: A, B yi gerektirir.

40. $\Leftrightarrow$: **İki yönlü gerektirme** işareti
$A \Leftrightarrow B$: A, B yi ve B, A yı gerektirir

41. (mod.) : Modüler aritmetikte kısaltma.
(Mod. 5) : 5 modülüne göre. (Modül 5)

42. $\oplus$: Saat aritmetiğinde **toplama** işareti.

43. $\otimes$: Saat aritmetiğinde **çarpma** işareti.

44. D : **Doğalsayılar** kümesi.

45. T : **Tamsayılar** kümesi.

46. $T+$: **Pozitif Tamsayılar** kümesi.

47. $T-$: **Negatif tamsayılar** kümesi.

48. T_0+ : $T+ \cup \{0\}$.

49. T_0- : $T- \cup \{0\}$.

50. R : **Rasyonel sayılar** kümesi.

51. G : **Gerçek sayılar** kümesi.

1. BÖLÜM MATEMATİK SİSTEMLERİ

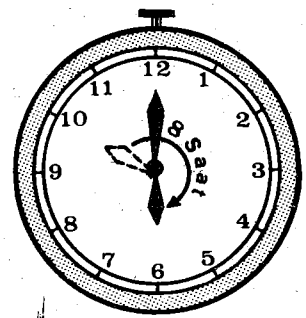
Konunun Ayrıntıları

1–1. Yeni Bir Toplama Çeşidi
1–2. Yeni Bir Çarpma Çeşidi
1–3. İşlem ve Kapalılık
1–4. Etkisiz (Birim) Eleman, Bir Elemanın Tersi
1–5. Bir Matematik Sistemi Nedir
1–6. Modüler Aritmetik

1–1. YENİ BİR TOPLAMA ÇEŞİDİ

Örnekler :

1. Tatilini Ankara'da geçirmek isteyen Metin, İstanbul'dan otobüsle saat 10'da hareket ediyor. Metin'in yolculuğu 8 saat süreceğine göre saat kaçta Ankara'da olacaktır?



1. Şekil

Bu soruya cevap vermek için yapacağımız aritmetik işlemi bir çeşit toplamadır. Ama, bu toplama bugüne değin öğrendiğimiz toplama işlemine benzemez. Metin İstanbul'dan saat 10 da hareket ediyor ve yolculuğu 8 saat sürüyor. Ankara'ya vardığı saati bulmak için, $10+8$ toplamasını yapmak gerekir. Bildiğimiz toplama işlemine göre $10+8=18$ olur. Ama bu 18 sayısı saatin üzerinde yoktur. Saatin üzerinde 1 den 12 ye dek sayılar işaretlenmiştir (1. şekil). Bu durumda $10+8$ toplamını, bu sayılardan biri ile göstermemiz gerekiyor. Saat 10 un üzerine 8 saat sayarsak, öğleden sonra saat 6 yı buluruz. O halde bu toplam $10+8=6$ olur. Bu toplama işlemi bildiğimiz toplamadan farklı olduğundan bunu başka bir işaretle, sözgelimi $\oplus$ ile gösterelim. Böylece,

$$10 \oplus 8 \equiv 6 \pmod{12}$$

denkliği yazılır ve şöyle okunur :

"on artı sekiz, altıya denktir (modülü 12)."

Buradaki **artı** sözcüğünün anlamı ile Aritmetikteki **artı** sözcüğünün anlamının değişik olduğuna dikkat ediniz. Saat üzerinde işaret edilen sayılarla yapılan işlemlere **saat aritmetiği** diyoruz. Toplama bu aritmetiğin ilk işlemidir. Burada "modül 12" sözü, saatımızın 12 bölmeye göre düzenlendiğini anlatır.

2. $9 \oplus 5 \equiv 2 \pmod{12}$; $8 \oplus 9 \equiv 5 \pmod{12}$;

$11 \oplus 5 \equiv 4 \pmod{12}$, $6 \oplus 9 \equiv 3 \pmod{12}$ dir.

Saat aritmetiğinde kimi saatlar için toplama işlemi, bildiğimiz toplama işleminin aynıdır. Gerçekten,

$$3 \oplus 7 \equiv 10 \pmod{12} \quad \text{ve} \quad 6 \oplus 5 \equiv 11 \pmod{12}$$

dir. Bu işlemler

$$3 + 7 = 10 \quad \text{ve} \quad 6 + 5 = 11$$

toplama işleminden başka birşey değildir.

Saat aritmetiğinde 1 den 12 ye kadar sayı vardır. 12 zaman başlangıcı olarak alındığından, aynı zamanda 0 (sıfır) sayılabilir. Öyleyse, saat aritmetiğinin elemanları :

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 dir.

Bu elemanlardan meydana gelen kümeyi :

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

ile gösterelim. Bu küme üzerinde yukarıda tanımladığımız toplama işlemi aşağıda bir çizelge ile gösterilmiştir.

⊕	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Sorular :

Yukardaki çizelgeden yararlanarak, saat aritmetiğine göre, şu toplamaları yapınız :

a) $3 \oplus 5$; **b)** $5 \oplus 3$; **c)** $8 \oplus 7$; **d)** $7 \oplus 8$;

e) $11 \oplus 7$; **f)** $7 \oplus 11$; **g)** $0 \oplus 5$; **h)** $5 \oplus 0$;

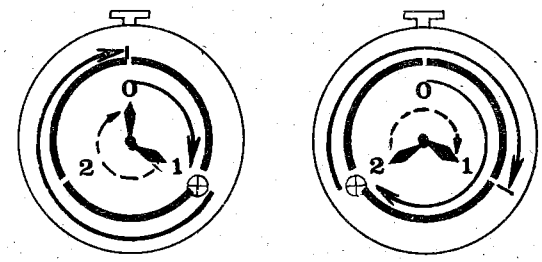
ı) $11 \oplus 8$; **i)** $8 \oplus 10$; **j)** $6 \oplus 6$; **k)** $7 \oplus 5$.

3. $A = \{0, 1, 2\}$ kümesi veriliyor. Bu kümenin elemanları "2. şekilde" görüldüğü gibi bir çemberin üzerinde işaret ediliyor. A kümesi üzerinde şöyle bir toplama işlemi tanımlanıyor :

$$0 \oplus 0 \equiv 0 \ ; \ 0 \oplus 1 \equiv 1 \ ; \ 0 \oplus 2 \equiv 2 \ ;$$
$$1 \oplus 0 \equiv 1 \ ; \ 1 \oplus 1 \equiv 2 \ ; \ 1 \oplus 2 \equiv 0 \ ;$$
$$2 \oplus 0 \equiv 2 \ ; \ 2 \oplus 1 \equiv 0 \ ; \ 2 \oplus 2 \equiv 1 \ .$$

Bu toplama işleminin çizelgesi aşağıda gösterilmiştir. Bu yeni toplama işlemi de saat aritmetiğindeki toplama işlemine benziyor. Burada üç elemanlı bir kümede toplama işlemi yapılmaktadır. Bu bakımdan burada "modül 3" tür.

3 'lü saat **3 'lü saat**



$1 \oplus 2 \equiv 0$ $2 \oplus 2 \equiv 1$

⊕	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

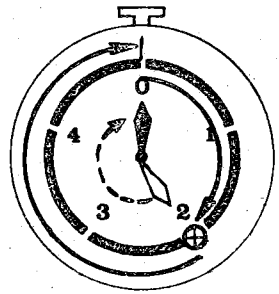
2. Şekil

4. $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ kümesi veriliyor. Bu kümenin elemanları "3. şekilde" görüldüğü gibi bir çemberin üzerinde işaretieniyor. A kümesi üzerinde aşağıda görüldüğü gibi saat aritmetiğine göre bir toplama işlemi tanımlanıyor.

Boş bırakılan denklikleri tamamlayınız. Bu toplama işleminde "modül 5" tir.

$0 \oplus 0 \equiv 0$	$1 \oplus 0 \equiv 1$	$2 \oplus 0 \equiv 2$
$0 \oplus 1 \equiv 1$	$1 \oplus 1 \equiv 2$	$2 \oplus 1 \equiv \ldots$
$0 \oplus 2 \equiv \ldots$	$1 \oplus 2 \equiv \ldots$	$2 \oplus 2 \equiv \ldots$
$0 \oplus 3 \equiv \ldots$	$1 \oplus 3 \equiv \ldots$	$2 \oplus 3 \equiv 0$
$0 \oplus 4 \equiv 4$	$1 \oplus 4 \equiv 0$	$2 \oplus 4 \equiv 1$
	$3 \oplus 0 \equiv \ldots$	$4 \oplus 0 \equiv \ldots$
	$3 \oplus 1 \equiv \ldots$	$4 \oplus 1 \equiv \ldots$
	$3 \oplus 2 \equiv \ldots$	$4 \oplus 2 \equiv \ldots$
	$3 \oplus 3 \equiv \ldots$	$4 \oplus 3 \equiv 2$
	$3 \oplus 4 \equiv 2$	$4 \oplus 4 \equiv \ldots$

5'li saat

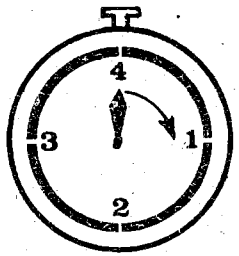


$2 \oplus 3 \equiv 0$

3. Şekil

5. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesi veriliyor. Bu kümenin elemanları "4. şekilde" görüldüğü gibi bir çemberin üzerinde gösterilmiştir. Bu düzende, zaman başlangıcı 4 olarak alınmıştır. İbrenin bir tam dönmesi 4 saat sayılıyor.

4'lü saat



4. Şekil

$\oplus$	1	2	3	4
1	2		4	1
2	3		1	2
3		1		3
4	1	2	3	4

Bu düzende de "modül 4" tür. Bu saate göre yapılan toplama işlemi yandaki çizelgede gösterilmiştir. Bu çizelgede boş bırakılan gözleri siz doldurunuz.

ALIŞTIRMALAR

A Grubu :

1. $A = \{0, 1, 2, 3\}$ kümesi üzerinde saat aritmetiğine göre bir toplama işlemi tanımlanıyor. Zaman başlangıcı 0 alınıyor. Bu toplama işleminin çizelgesini yapınız. Bu çizelgeye göre aşağıdaki denkliklerde ? işareti bulunan yerlere uygun olan sayıları yazınız :

a) $1 \oplus 2 \equiv ?$ (mod. 4) ; b) $2 \oplus 3 \equiv ?$ (mod. 4) ;

c) $3 \oplus 3 \equiv ?$ (mod. 4) ; d) $1 \oplus 3 \equiv ?$ (mod. 4) ;

e) $0 \oplus 3 \equiv ?$ (mod. 4) ; f) $2 \oplus 2 \equiv ?$ (mod. 4) .

2. "1. alıştırmada" yaptığınız çizelgeye göre, aşağıdaki denkliklerde S harfi yerine uygun olan sayıları yazınız :

a) $3 \oplus S \equiv 1$ (mod. 4) ; b) $S \oplus 2 \equiv 0$ (mod. 4) ;

c) $1 \oplus S \equiv 1$ (mod. 4) ; d) $3 \oplus S \equiv 2$ (mod. 4) ;

e) $3 \oplus S \equiv 1$ (mod. 4) ; f) $2 \oplus S \equiv 0$ (mod. 4) .

3. $A = \{0, 1\}$ kümesinin elemanlarını bir çember üzerinde işaretleyiniz. Sonra 2 modülüne göre aşağıdaki toplamaları yapınız.

a) $0 \oplus 0 \equiv ?$ (mod. 2) ; b) $0 \oplus 1 \equiv ?$ (mod. 2) ;

c) $1 \oplus 0 \equiv ?$ (mod. 2) ; d) $1 \oplus 1 \equiv ?$ (mod. 2) ;

e) $1 \oplus ? \equiv ?$ (mod. 2) ; f) $? \oplus 1 \equiv 0$ (mod. 2) .

B Grubu :

4. $A = \{1, 2\}$ kümesinin elemanlarını, 2 zaman başlangıcı olmak üzere bir çemberin üzerine yazınız. Bu saate göre aşağıdaki toplamaları yapınız :

a) $1 \oplus 1 \equiv ?$ (mod. 2) ; b) $1 \oplus 2 \equiv ?$ (mod. 2) ;

c) $2 \oplus 2 \equiv ?$ (mod. 2) ; d) $2 \oplus 1 \equiv ?$ (mod. 2) ;

e) $1 \oplus ? \equiv 1$ (mod. 2) ; f) $2 \oplus ? \equiv 2$ (mod. 2) .

5. $A = \{1, 2, 3\}$ kümesinin elemanlarını, bir çemberin üzerine, 3 zaman başlangıcı olmak üzere saat ibrelerinin dönme yönünde 3 , 2 , 1 sırasına göre yazınız. Bu saate göre aşağıdaki toplamaları yapınız :

a) $1 \oplus 2 \equiv ?$ (mod. 3) ; b) $1 \oplus 3 \equiv ?$ (mod. 3) ;

c) $2 \oplus 3 \equiv ?$ (mod. 3) ; d) $3 \oplus 2 \equiv ?$ (mod. 3) ;

e) $1 \oplus 1 \equiv ?$ (mod. 3) ; f) $2 \oplus 2 \equiv ?$ (mod. 3) ;

g) $3 \oplus ? \equiv 1$ (mod. 3) ; h) $3 \oplus ? \equiv 2$ (mod. 3) ;

1-2. YENİ BİR ÇARPMA ÇEŞİDİ

Örnekler :

Saat aritmetiğindeki çarpma işlemini örneklerle açıklayalım :

1. (3×4) çarpımı, 3 kez 4 sayısının yazılıp toplanacağını anlatır. Öyleyse,

$$3 \times 4 = 4 \oplus 4 \oplus 4$$

tür. Saat aritmetiğindeki toplama işlemine göre $4 \oplus 4 \equiv 8 \pmod{12}$ dir ve

$$8 \oplus 4 \equiv 0 \pmod{12}$$ yazılır.

Burada da çarpma işlemi şimdiye kadar bildiğimiz çarpmadan farklı olduğundan, bu işlemi belirtmek üzere değişik bir işaret kullanmalıyız. Bunu da $\otimes$ ile gösterelim. Böylece,

$$3 \otimes 4 \equiv 0 \pmod{12}$$

denkliği yazılır.

2. Bunun gibi, $(2 \otimes 9)$ çarpımını bulalım. Bu çarpımı saat aritmetiğinde toplama ile gösterebiliriz.

$$2 \otimes 9 = 9 \oplus 9$$

dur. Toplama çizelgesinde hemen $9 \oplus 9 \equiv 6 \pmod{12}$ olduğu bulunur. Öyleyse,

$$2 \otimes 9 \equiv 6 \pmod{12}$$ dir.

3. $(5 \otimes 7)$ çarpımını bulalım. Bu çarpımı yine toplama ile gösterelim. $(5 \otimes 7)$ demek, 5 kez 7 yazılarak toplanacak demektir. Buna göre,

$$5 \otimes 7 = 7 \oplus 7 \oplus 7 \oplus 7 \oplus 7$$

olur. Şimdi burada ardışık bir toplama işlemi vardır. Saat aritmetiğinde bu ardışık toplama işlemi, bildiğimiz toplama işlemindeki ardışık toplama işleminden farklı değildir.

$7 \oplus 7 \equiv 2 \pmod{12}$; $2 \oplus 2 \equiv 4 \pmod{12}$ ve $4 \oplus 7 \equiv 11 \pmod{12}$ bulunur. Böylece çarpım :

$5 \otimes 7 = \underbrace{7 \oplus 7} \oplus \underbrace{7 \oplus 7} \oplus 7$ ya da

$5 \otimes 7 = \underbrace{2 \oplus 2} \oplus 7$,

$5 \otimes 7 = 4 \oplus 7 \equiv 11 \pmod{12}$ dir.

Saat aritmetiğinin çarpma çizelgesi aşağıdadır :

$\otimes$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0	2	4	6	8	10	0	2	4	6	8	10
3	0	3	6	9	0	3	6	9	0	3	6	9
4	0	4	8	0	4	8	0	4	8	0	4	8
5	0	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7
6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6
7	0	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5
8	0	8	4	0	8	4	0	8	4	0	8	4
9	0	9	6	3	0	9	6	3	0	9	6	3
10	0	10	8	6	4	2	0	10	8	6	4	2
11	0	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Sorular :

Yukarıdaki çizelgeden yararlanarak, saat aritmetiğine göre, aşağıdaki çarpmaları yapınız :

a) $5 \otimes 3$; b) $4 \otimes 6$; c) $7 \otimes 3$; d) $6 \otimes 5$;
e) $8 \otimes 4$; f) $9 \otimes 3$; g) $1 \otimes 11$; h) $0 \otimes 10$;
ı) $9 \otimes 8$; i) $8 \otimes 8$; j) $9 \otimes 9$; k) $10 \otimes 10$.

4. $A = \{0, 1, 2\}$ kümesi üzerinde çarpma işlemini tanımlayabiliriz :

2 kez 2 yi şöyle tanımlayacağız :

$$2 \otimes 2 = 2 \oplus 2$$

Bu eşitlik,

"İki çarpı iki eşit, iki artı iki"

diye okunur.

Toplama çizelgesine göre $2 \oplus 2 \equiv 1$ dir. Öyleyse, $2 \otimes 2 \equiv 1$ bulunur. Bunun gibi, öbür elemanların ikişer ikişer çarpımları :

$0 \otimes 0 \equiv 0$; $0 \otimes 1 \equiv 0$;
$1 \otimes 0 \equiv 0$; $1 \otimes 1 \equiv 1$;
$2 \otimes 0 \equiv 0$; $2 \otimes 1 \equiv 2$;
$0 \otimes 2 \equiv 0$;
$1 \otimes 2 \equiv 2$;
$2 \otimes 2 \equiv 1$

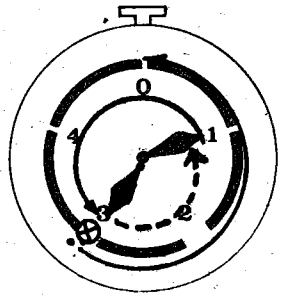
$\otimes$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

dir. Bu çarpmanın çizelgesi yanda görülüyor. Bu işlemde "modül 3" tür.

5. $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ kümesi veriliyor. Bu kümenin elemanları, "5. şekilde" görüldüğü gibi, bir çemberin üzerinde işaretleniyor. A kümesi üzerinde aşağıdaki çizelgede görüldüğü gibi, saat aritmetiğine göre bir çarpma işlemi tanımlanıyor.

Boş bırakılan gözleri doldurunuz. Bu çarpma işleminde "modül 5" tir.

5'li saat



⊗	0	1	2	3	4
0	0	0	0		
1		1			4
2				1	
3	0	3		4	
4	0			2	

$2 \otimes 3 = 3 \oplus 3 \equiv 1$

5 Şekil

$$4 \otimes 3 \equiv 3 \oplus 3 \oplus 3 \oplus 3$$

yazılır. "5. şekle" göre, $3 \oplus 3 \equiv 1$ olduğundan,

$$4 \otimes 3 = \underbrace{3 \oplus 3} \oplus \underbrace{3 \oplus 3} \equiv 2$$

$$4 \otimes 3 = \quad 1 \quad \oplus \quad 1 \quad \equiv 2$$

bulunur.

Bunun gibi,

$$3 \otimes 2 = 2 \oplus 2 \oplus 2$$

dir. Toplamaya göre,

$$2 \oplus 2 \equiv 4 \quad \text{ve} \quad 4 \oplus 2 \equiv 1$$

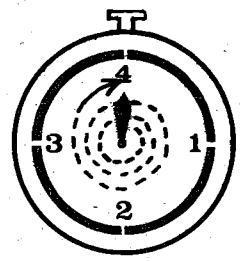
olduğundan,

$$3 \otimes 2 \equiv 1$$

bulunur. Öbür elemanların çarpımı da benzer yoldan hesaplanır.

6. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesi veriliyor. Bu kümenin elemanları, "6. şekilde" görüldüğü gibi, bir çemberin üzerinde gösterilmiştir. Bu düzende, zaman başlangıcı 4 olarak alınmıştır. İbrenin bir tam dönmesi 4 saat sayılıyor. Bu saate göre yapılan çarpma işleminde "modül 4" tür. Bu saate göre yapılan çarpma işlemi aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir. Boş gözleri doldurunuz. Sözgelimi,

4'lü saat



⊗	1	2	3	4
1	1			4
2			2	4
3	3		1	4
4		4		4

6. Şekil

$$3 \otimes 4 \equiv 4 \oplus 4 \oplus 4$$

tür. Bu saate göre, $4 \oplus 4 \equiv 4$ tür. Çünkü, 4'ten başlayarak bu saat çevresinde 4 adım ilerlersek yine 4'e varırız. Öyleyse,

$$3 \otimes 4 = \underbrace{4 \oplus 4} \oplus 4$$

$$\underbrace{4 \quad \oplus 4}$$

$$3 \otimes 4 \equiv \quad 4$$

olur.

ALIŞTIRMALAR

A Grubu :

1. $A = \{0, 1, 2, 3\}$ kümesi üzerinde saat aritmetiğine göre bir çarpma işlemi tanımlanıyor. Zaman başlangıcı 0 alınıyor. Bu çarpma işleminin çizelgesini yapınız. Bu çizelgeye göre, aşağıdaki denkliklerde ? işareti bulunan yerlere uygun olan sayıları yazınız.

a) $0 \otimes 1 \equiv ?$ (mod. 4) ; **b)** $1 \otimes 3 \equiv ?$ (mod. 4) ;

c) $2 \otimes 1 \equiv ?$ (mod. 4) ; **d)** $3 \otimes 1 \equiv ?$ (mod. 4) ;

e) $2 \otimes 3 \equiv ?$ (mod. 4) ; **f)** $3 \otimes 3 \equiv ?$ (mod. 4) .

2. "1. alıştırmada" yaptığınız çarpma çizelgesine göre, aşağıdaki denkliklerde y harfi yerine uygun olan sayıları yazınız :

a) $2 \otimes y \equiv 1$ (mod. 4) ; **b)** $y \otimes 3 \equiv 1$ (mod. 4) ;

c) $2 \otimes y \equiv 0$ (mod. 4) ; **d)** $3 \otimes y \equiv 2$ (mod. 4) ;

e) $y \otimes 3 \equiv 3$ (mod. 4) ; **f)** $1 \otimes y \equiv 0$ (mod. 4) .

3. $A = \{0, 1\}$ kümesinin elemanları arasında saat aritmetiğine göre aşağıdaki çarpmaları yapınız.

a) $0 \otimes 0 \equiv ?$ (mod. 2) ; b) $0 \otimes 1 \equiv ?$ (mod. 2) ;

c) $1 \otimes 0 \equiv ?$ (mod. 2) ; d) $1 \otimes 1 \equiv ?$ (mod. 2) ;

e) $1 \otimes ? \equiv 1$ (mod. 2) ; f) $? \otimes 1 \equiv 0$ (mod. 2) .

B Grubu :

4. $A = \{1, 2\}$ kümesinin elemanları arasında saat aritmetiğine göre bir çarpma işlemi tanımlanıyor. Bu işlemde "modül 2" dir. Bu çarpma işleminin çizelgesini yapınız. Bu çizelgeye göre, aşağıdaki denkliklerde ? işareti yerine A kümesinin elemanlarından uygun olanını yazınız :

a) $1 \otimes 1 \equiv ?$ (mod. 2) ; b) $1 \otimes 2 \equiv ?$ (mod. 2) ;

c) $2 \otimes 2 \equiv ?$ (mod. 2) ; d) $2 \otimes 1 \equiv ?$ (mod. 2) ;

e) $1 \otimes ? \equiv 1$ (mod. 2) ; f) $2 \otimes ? \equiv 2$ (mod. 2) .

5. $A = \{1, 2, 3\}$ kümesinin elemanları arasında saat aritmetiğine göre bir çarpma işlemi tanımlanıyor. Bu çarpma işleminde "modül 3" tür. Bu çarpma işleminin çizelgesini ve bu çizelgeye göre, aşağıdaki çarpmaları yapınız :

a) $1 \otimes 2 \equiv ?$ (mod. 3) ; b) $1 \otimes 3 \equiv ?$ (mod. 3) ;

c) $2 \otimes 3 \equiv ?$ (mod. 3) ; d) $3 \otimes ? \equiv ?$ (mod. 3) ;

e) $3 \otimes ? \equiv 3$ (mod. 3) ; f) $2 \otimes ? \equiv 1$ (mod. 3) .

6. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin elemanları arasında saat aritmetiğine göre bir çarpma işlemi tanımlanıyor. Zaman başlangıcı 5 ve bu işlemin "modülü 5" tir. Bu çarpma işleminin çizelgesini tamamlayınız.

$\otimes$	1	2	3	4	5
1					
2					5
3			4	2	5
4		3			
5		5		5	5

1-3. İŞLEM VE KAPALILIK

1. İkili İşlem

Örnekler :

1. $D = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ doğalsayılar kümesinin herhangi iki elemanını, sözgelişi, 2 ve 5 elemanlarını alalım. Bu iki eleman $(2 ; 5)$ **ikilisini** oluştururlar. 2, bu ikilinin **birinci terimi,** 5 de **ikinci terimi** dir.

Bu iki eleman arasında bildiğimiz **toplama** işlemi uygulanırsa, bu $(2 ; 5)$ ikilisi, $2 + 5 = 7$ sayısına gönderilmiş olur. Bunu şöyle gösteririz:

$$(2 ; 5) \longmapsto 2 + 5 = 7 \in D .$$

Bu 2 ve 5 sayıları arasında bildiğimiz **Çarpma** ve **bölme** işlemleri uygulanırsa :

$$(2 ; 5) \longmapsto 2 \times 5 = 10 \in D ;$$

$$(2 ; 5) \longmapsto 2 : 5 = 0{,}4 \notin D$$

olduğu görülür.

Anlıyoruz ki, D kümesinin iki elemanı arasında uygulanan bir işlemle, yeni bir sayı elde ediliyor. Başka bir söyleyişle, bu iki elemanın oluşturduğu **ikili** yeni bir elemana gönderiliyor. Bu yeni eleman D kümesinin elemanı olur ya da olmaz.

2. İncelediğimiz saat aritmetiğinde,

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

kümesinde tanımlanan **toplama** ($\oplus$) ve **çarpma** ($\otimes$) işlemlerinin çizelgelerine dikkat edilirse, S kümesinin herhangi iki elemanı arasında uygulanan bu işlemler sonunda yine S kümesinin birer elemanının elde edildiği görülür. Sözgelişi, 5 ve 8 elemanları için :

$$(5 ; 8) \longmapsto 5 \oplus 8 \equiv 1 \text{ (mod. 12)} ;$$

$$(5 ; 8) \longmapsto 5 \otimes 8 \equiv 4 \text{ (mod. 12)}$$

bulunur. Öyleyse, S kümesinin elemanlarından oluşan $(5 ; 8)$ ikilisi, $\oplus$ işlemiyle 1'e ve $\otimes$ işlemiyle de 4'e gönderiliyor. Burada, $1 \in S$ ve $4 \in S$ dir.

3. Şimdi de R rasyonel sayılar kümesinin $\frac{5}{6}$ ve $\frac{1}{3}$ elemanlarını alalım. Bu elemanlar arasında bildiğimiz toplama ve çarpma işlemlerini uygulayalım :

$$\left(\frac{5}{6} ; \frac{1}{3}\right) \longmapsto \frac{5}{6} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} + \frac{2}{6} = \frac{7}{6} \in R ;$$

$$\left(\frac{5}{6} ; \frac{1}{3}\right) \longmapsto \frac{5}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{18} \in R$$

olduğu görülür. Burada, $\left(\frac{5}{6} ; \frac{1}{3}\right)$ rasyonel sayı ikilisi $+$ işlemiyle $\frac{7}{6}$ rasyonel sayısına, $\times$ işlemiyle de $\frac{5}{18}$ rasyonel sayısına eşlenmiş oluyor.

4. $A = \{0, 1, 2, 3\}$ kümesini alalım Bu kümenin elemanları arasında uygulanan ★ (yıldız) işlemi, yandaki çizelgede görüldüğü gibi tanımlanıyor. Buna göre,

★	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	2	3
2	2	2	2	3
3	3	3	3	3

$0 ★ 0 = 0$; $1 ★ 1 = 1$; $1 ★ 2 = 2$;
$2 ★ 1 = 2$; $2 ★ 2 = 2$; $2 ★ 3 = 3$;
$3 ★ 2 = 3$; $1 ★ 3 = 3$; $3 ★ 3 = 3$;
....

oluyor. Görülüyor ki, A kümesinin herhangi iki elemanı arasında uygulanan ★ işlemi, sonuç olarak, bu elemanlar eşitse bunlardan birini, değilse büyük olanı veriyor. Böylece, A kümesinin herhangi iki elemanından oluşan ikili, ★ işlemiyle, yine A kümesinin bir elemanına gönderiliyor :

$(0 ; 0) \longmapsto 0$; $(0 ; 1) \longmapsto 1$; $(1 ; 1) \longmapsto 1$;
$(1 ; 2) \longmapsto 2$; $(2 ; 1) \longmapsto 2$; $(2 ; 2) \longmapsto 2$;
$(2 ; 3) \longmapsto 3$; $(3 ; 2) \longmapsto 3$; $(3 ; 3) \longmapsto 3$;
....

Bu örneklerde incelediğimiz işlemler, **ikili işlemlerdir.** Şu halde :

İkili İşlem, bir kümenin iki elemanını yeni bir elemana götüren bir kuraldır.

2. Kapalılık

Bir kümenin herhangi iki elemanı arasında uygulanan bir işlemle, bu kümenin bir elemanı elde ediliyorsa, "küme bu işleme göre **kapalıdır**" denir.

Doğalsayılar kümesi, **toplama** ve **çarpma** işlemlerine göre **kapalı; çıkarma** ve **bölme** işlemlerine göre **kapalı değildir.** Çünkü, 2 ve 5 iki doğalsayı oldukları halde, $(2 - 5)$ sayısı ve $2 : 5 = 0{,}4$ sayısı doğalsayı değildir.

Rasyonel sayılar kümesi de **toplama** ve **çarpma** işlemlerine göre **kapalıdır.**

$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

kümesi üzerinde saat aritmetiğine göre uygulanan **toplama** ($\oplus$) ve **çarpma** ($\otimes$) işlemleriyle elde edilen her sayının bu kümenin bir elemanı olduğunu biliyoruz. Öyleyse S kümesi $\oplus$ ve $\otimes$ işlemlerine göre **kapalıdır.**

Bunun gibi, $A = \{0, 1, 2\}$ kümesi üzerinde saat aritmetiğine göre uygulanan $\oplus$ ve $\otimes$ işlemleriyle elde edilen her sayı A kümesinin bir elemanıdır. Bunu da, düzenlediğimiz toplama ($\oplus$) ve çarpma ($\otimes$) çizelgelerinde görmek kolaydır. Öyleyse A kümesi, $\oplus$ ve $\otimes$ işlemlerine göre **kapalıdır.**

Yukarıda verdiğimiz "4. örnekte" $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ kümesinde tanımlanan ★ (yıldız) işleminin çizelgesine dikkat edilirse, herhangi iki eleman arasında uygulanan ★ işlemi sonunda elde edilen sayının A kümesinin bir elemanı olduğu görülür. Öyleyse bu A kümesi ★ işlemine göre **kapalıdır.**

3. Değişme Özeliği

Bir kümenin iki elemanı arasında uygulanan bir işlemde, bu elemanların yerleri değiştiği zaman sonuç değişmiyorsa, "bu ikili işlemin **değişme özeliği** vardır" deriz.

Örnekler :

1. $D = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ doğalsayılar kümesinde tanımlanan **toplama, çıkarma, çarpma** ve **bölme** işlemleri **ikili işlemlerdir.**

Toplama ve **çarpma** işlemlerinin **değişme özeliği vardır.** Gerçekten,

$2 \in D$ ve $5 \in D$ için ;

$2 + 5 = 5 + 2$ ve $2 \times 5 = 5 \times 2$

dir. Bu eşitlikler, her doğalsayı ikilisi için yazılabilir.

Çıkarma ve **bölme** işlemlerinin **değişme özeliği yoktur.** Gerçekten

$2 - 5 \neq 5 - 2$ ve $2 : 5 \neq 5 : 2$ dir.

2. Rasyonel sayılar kümesinde tanımlanan **toplama** ve **çarpma** işlemlerinin de **değişme özeliği vardır.** Çıkarma ve bölme işlemlerinin değişme özeliği var mıdır?

3. $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

kümesinde saat aritmetiğine göre tanımlanan **toplama** ($\oplus$) ve **çarpma** ($\otimes$) işlemlerinin de **değişme özeliği vardır.** Gerçekten, $\oplus$ ve $\otimes$ çizelgeleri incelenirse,

$9 \oplus 8 \equiv 5 \pmod{12}$ | $9 \otimes 8 \equiv 0 \pmod{12}$

$8 \oplus 9 \equiv 5 \pmod{12}$ | $8 \otimes 9 \equiv 0 \pmod{12}$

olduğu görülür. Bunlara göre,

$$9 \oplus 8 = 8 \oplus 9 \quad \text{ve} \quad 9 \otimes 8 = 8 \otimes 9$$

yazılır.

Genel olarak, a ve b, S kümesinin herhangi iki elemanı olsun;

$$a \oplus b = b \oplus a \quad \text{ve} \quad a \otimes b = b \otimes a$$

olduğu görülür.

4. $A = \{\square, \Delta, \bigcirc\}$ kümesinde tanımlanan ★ işlemi yandaki çizelge ile veriliyor. Bu işlemin **değişme özeliği** var mıdır?

★	□	Δ	○
□	Δ	○	□
Δ	○	□	Δ
○	□	Δ	○

Çizelgeye dikkat edilirse,

$$\left.\begin{array}{l} \square \bigstar \Delta \equiv \bigcirc \\ \Delta \bigstar \square \equiv \bigcirc \end{array}\right\} \Longrightarrow \square \bigstar \Delta = \Delta \bigstar \square$$

yazılır. Aynı şekilde,

$$\square \bigstar \bigcirc = \bigcirc \bigstar \square \quad \text{ve} \quad \Delta \bigstar \bigcirc = \bigcirc \bigstar \Delta$$

eşitlikleri de yazılır. Öyleyse bu ★ işleminin **değişme özeliği vardır.**

4. Birleşme Özeliği

Örnekler :

1. $D = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ doğalsayılar kümesinde tanımladığımız toplama ve çarpma işlemlerine göre, herhangi üç doğalsayı için,

$$8 + (2+5) = (8+2) + 5 \quad \text{ve} \quad 8 \times (2 \times 5) = (8 \times 2) \times 5$$

eşitlikleri yazılır. Birinci eşitliğe, toplamanın birleşme özeliği, ikinci eşitliğe de çarpmanın birleşme özeliği demiştik.

Bu üç doğalsayı arasında uygulanan bölme işleminin birleşme özeliği var mıdır? Bunu arayalım :

$$\left.\begin{array}{l} 8 : (2 : 5) = 8 : 0{,}4 = 20 \\ (8 : 2) : 5 = 4 : 5 \quad = 0{,}8 \end{array}\right\} \Longrightarrow 8 : (2 : 5) \neq (8 : 2) : 5$$

yazılır. Öyleyse, bölme işleminin birleşme özeliği yoktur.

2. $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

kümesinde saat aritmetiğine göre tanımlanan toplama ($\oplus$) ve çarpma ($\otimes$) işlemlerinin de birleşme özeliği vardır. Gerçekten, S kümesinin herhangi üç elemanı için,

$$\left.\begin{array}{l} 2 \oplus (6 \oplus 7) \equiv 2 \oplus 1 \equiv 3 \\ (2 \oplus 6) \oplus 7 \equiv 8 \oplus 7 \equiv 3 \end{array}\right\} \Longrightarrow 2 \oplus (6 \oplus 7) = (2 \oplus 6) \oplus 7 ;$$

$$\left.\begin{array}{l} 2 \otimes (6 \otimes 7) \equiv 2 \otimes 6 \equiv 0 \\ (2 \otimes 6) \otimes 7 \equiv 0 \otimes 7 \equiv 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow 2 \bigcirc (6 \bigcirc 7) = (2 \bigcirc 6) \bigcirc 7$$

eşitlikleri yazılıdır.

3. $A = \{\square, \Delta, \bigcirc\}$ kümesinde tanımlanan ★ işleminin çizelgesi yukarıda verilmişti. Bu işlemin birleşme özeliği var mıdır?

$$\left.\begin{array}{l} (\square \bigstar \Delta) \bigstar \bigcirc \equiv \bigcirc \bigstar \bigcirc \equiv \bigcirc \\ \square \bigstar (\Delta \bigstar \bigcirc) \equiv \square \bigstar \Delta \equiv \bigcirc \end{array}\right\} \Longrightarrow (\square \bigstar \Delta) \bigstar \bigcirc = \square \bigstar (\Delta \bigstar \bigcirc)$$

eşitliği yazılır. Öyleyse bu ★ işleminin birleşme özeliği vardır.

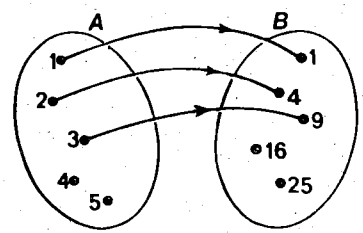
Genel olarak, bir kümenin herhangi üç elemanı a, b, c ve bu kümede tanımlanan bir işlem **T** olsun.

$$(a \,\mathbf{T}\, b) \,\mathbf{T}\, c = a \,\mathbf{T}\, (b \,\mathbf{T}\, c)$$

eşitliği gerçekleniyorsa, "bu **T** işleminin birleşme özeliği vardır" deriz.

5. Birli İşlem

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $B = \{1, 4, 9, 16, 25\}$



7. Şekil

kümelerini alalım. Bu kümelerin elemanları arasında "7. şekilde" görüldüğü gibi **bire-bir eşleme** yapalım. A kümesindeki, sözgelimi 3 elemanı, B kümesindeki 9 sayısı ile eşleşiyor. Bu 9 sayısı 3 sayısının **karesidir.**

Bu eşleme biçimine göre, A kümesinin 4 ve 5 elemanları, B kümesinin hangi elemanlariyle eşleşir?

Böyle, bir kümenin bir elemanını, bu kümenin ya da başka bir kümenin elemanlarına götüren bir eşleme **birli bir işlemdir.** buradaki **birli işlem, "bir doğalsayının karesini alma"** işlemidir. Doğalsayılar kümesinde, her doğalsayının karesi var mıdır? Doğalsayılar kümesi, **"kare alma"** işlemine göre **kapalı** mıdır?

Doğalsayılar kümesinde, **"küp alma"** işlemi de **birli bir işlem**dir. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesi, "küp alma" işlemiyle hangi kümeye gönderilir?

ALIŞTIRMALAR

A Grubu :

1. Rasyonel sayılar kümesi **bölme** işlemine göre **kapalı** mıdır?

2. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesi veriliyor. Bu küme üzerinde genel **toplama ve çarpma** işlemleri uygulanıyor.

a) A kümesi toplama işlemine göre **kapalı** mıdır?

b) A kümesi çarpma işlemine göre **kapalı** mıdır?

3. Doğal sayılar kümesinde "karesi 4 olan sayıyı bulma işlemi" **ikili işlem** mi, yoksa **birli işlem** midir?

4. Doğalsayılar kümesinde "bir sayının iki katını bulma işlemi" nasıl bir işlemdir?

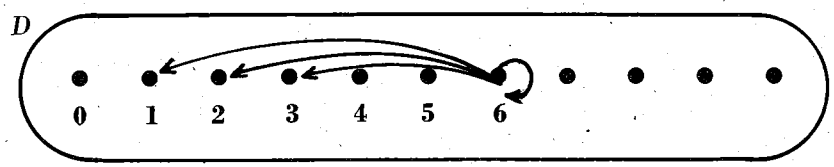
Doğalsayılar kümesi bu işleme göre **kapalı** mıdır?

5. Doğalsayılar kümesinde "bir sayının yarısını bulma işlemi" nasıl bir işlemdir?

Doğalsayılar kümesi bu işleme göre **kapalı** mıdır?

6. Doğalsayılar kümesinde "6 sayısının bölenlerini bulma işlemi" nasıl yapılır?

Bu işlemin **oklu şeması** aşağıda görülüyor.



8. Şekil

B Grubu :

7. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinde saat aritmetiğine göre tanımlanan **toplama** ve **çarpma** çizelgelerini yapınız. Aşağıdaki eşitlikler doğru mudur?

a) $3 \oplus 4 \stackrel{?}{=} 4 \oplus 3$ **d)** $3 \otimes 4 \stackrel{?}{=} 4 \otimes 3$

b) $2 \oplus (3 \oplus 5) \stackrel{?}{=} (2 \oplus 3) \oplus 5$; **e)** $2 \otimes (3 \otimes 5) \stackrel{?}{=} (2 \otimes 3) \otimes 5$;

c) $2 \oplus 5 \stackrel{?}{=} 5 \oplus 2 \equiv 2$; **f)** $2 \otimes 5 \stackrel{?}{=} 5 \otimes 2 \equiv 5$.

8. Yukarıda verilen A kümesinde saat aritmetiğine göre yapılan **toplama** ($\oplus$) ve **çarpma** ($\otimes$) işlemlerinde aşağıdaki denklikler verilmiştir. s yerine uygun olan sayıları yazınız.

a) $3 \oplus s \equiv 2 \pmod 5$; **e)** $3 \otimes s \equiv 1 \pmod 5$;

b) $s \oplus 4 \equiv 3 \pmod 5$; **f)** $s \otimes 3 \equiv 2 \pmod 5$;

c) $5 \oplus s \equiv 5 \pmod 5$; **g)** $4 \otimes s \equiv 5 \pmod 5$;

d) $s \oplus 2 \equiv 1 \pmod 5$; **h)** $s \otimes 3 \equiv 4 \pmod 5$.

9. Yukarıda verilen A kümesinde saat aritmetiğine göre yapılan $\oplus$ ve $\otimes$ işlemleri göz önüne alınıyor.

a) A kümesi bu işlemlere göre **kapalı** mıdır?

b) Bu işlemlerin **değişme** ve **birleşme özelikleri** var mıdır?

c) $3 \otimes (2 \oplus 4) = (3 \otimes 2) \oplus (3 \otimes 4)$

eşitliğinin doğruluğunu gerçekleyiniz. Buna, saat aritmetiğine göre yapılan çarpma işleminin toplama işlemi üzerine **dağılma özeliği** denir.

1-4. ETKİSİZ (BİRİM) ELEMAN, BİR ELEMANIN TERSİ

1. İkili İşleme Göre Etkisiz Eleman

Örnekler :

1. Doğalsayılar kümesinde ve rasyonal sayılar kümesinde tanımladığımız toplama ve çarpma işlemlerini anımsayalım :

$$7 + 0 = 0 + 7 = 7 \ ;$$
$$7 \times 1 = 1 \times 7 = 7 \quad \text{dir.}$$

Genel olarak, her n rasyonel sayısı için :

$$n + 0 = 0 + n = n \quad \text{ve}$$
$$n \times 1 = 1 \times n = n$$

olduğunu biliyoruz. Anlıyoruz ki,

0 sayısının toplama $(+)$ işlemi üzerinde,

1 sayısının da çarpma $(\times)$ işlemi üzerinde

bir etkisi yoktur. Bu nedenle,

0 sayısına, toplama işlemine göre **etkisiz eleman,**

1 sayısına da, çarpma işlemine göre **etkisiz eleman** diyoruz.

2. Saat aritmetiğinde,

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

kümesi üzerinde tanımladığımız $\oplus$ ve $\otimes$ işlemlerine göre yaptığımız **çizelgeler** incelenirse :

$8 \oplus 0 = 0 \oplus 8 \equiv 8 \pmod{12}$; | $8 \otimes 1 = 1 \otimes 8 \equiv 8 \pmod{12}$;
$5 \oplus 0 = 0 \oplus 5 \equiv 5 \pmod{12}$; | $5 \otimes 1 = 1 \otimes 5 \equiv 5 \pmod{12}$

olduğu görülür.

Genel olarak, her $n \in S$ için :

$$n \oplus 0 = 0 \oplus n \equiv n \pmod{12} ;$$
$$n \otimes 1 = 1 \otimes n \equiv n \pmod{12}$$

olur. Anlıyoruz ki, S kümesinin herhangi bir elemanı,

$\oplus$ işlemine göre **0** elemanı ile birleştirilince,

$\otimes$ işlemine göre **1** elemanı ile birleştirilince

yine bu elemanın kendisi elde ediliyor. Başka bir söyleyişle,

0 elemanı $\oplus$ işlemi üzerinde,

1 elemanı da $\otimes$ işlemi üzerinde

bir etki yapmıyor. Bu nedenle,

0 , $\oplus$ işlemine göre, S kümesinin **etkisiz elemanı** ;

1 de, $\otimes$ işlemine göre, S kümesinin **etkisiz elemanıdır.**

3. $A = \{1, 2, 3\}$ kümesinde saat aritmetiğine göre tanımlanan $\oplus$ ve $\otimes$ işlemlerinin çizelgeleri aşağıda görülüyor:

$\oplus$	1	2	3
1	2	3	1
2	3	1	2
3	1	2	3

$\otimes$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	1	3
3	3	3	3

$\oplus$ işleminin çizelgesine göre,

$$1 \oplus 3 = 3 \oplus 1 \equiv 1 \pmod{3} ;$$
$$2 \oplus 3 = 3 \oplus 2 \equiv 2 \pmod{3} ;$$
$$3 \oplus 3 = 3 \oplus 3 \equiv 3 \pmod{3} ;$$

$\otimes$ işleminin çizelgesine göre de,

$$1 \otimes 1 = 1 \otimes 1 \equiv 1 \pmod{3} ;$$
$$2 \otimes 1 = 1 \otimes 2 \equiv 2 \pmod{3} ;$$
$$3 \otimes 1 = 1 \otimes 3 \equiv 3 \pmod{3}$$

olduğu görülüyor. Anlıyoruz ki A kümesinin :

3 elemanı $\oplus$ işlemi üzerinde,

1 elemanı da $\otimes$ işlemi üzerinde

bir etki yapmıyor. Bu nedenle,

3, $\oplus$ işlemine göre, A kümesinin **etkisiz elemanı;**

1, $\otimes$ işlemine göre, A kümesinin **etkisiz elemanıdır.**

$\otimes$ çizelgesine göre, A kümesinin her elemanının 3 ile çarpımı yine 3 oluyor. Başka bir söyleyişle, 3 ile saat aritmetiğine göre çarpılan 1 ve 2 sayıları yok oluyor. Bu nedenle, A kümesinin bu 3 sayısına $\otimes$ işlemine göre **yutan eleman** adı verilir.

Doğalsayılar kümesinde, **çarpma** işlemine göre, **yutan eleman** 0 sayısıdır. Çünkü, 0, kendisi ile çarpılan her sayıyı yutar.

4. $M = \{a, b, c, d\}$ kümesinde tanımlanan $\bigstar$ (yıldız) işleminin çizelgesi yanda verilmiştir, Bu çizelgeye göre, sözgelişi,

$$a \bigstar b \equiv c$$

dir. Bunu,

"a yıldız b, c'ye denktir" diye okuyunuz. Aşağıdaki denkliklerde (?) işareti yerine hangi harf gelmedilir?

$\bigstar$	a	b	c	d
a	b	c	d	a
b	c	d	a	b
c	d	a	b	c
d	a	b	c	d

$a \bigstar d = a$; $b \bigstar ? = b$; $c \bigstar ? = c$; $d \bigstar d = ?$

$? \bigstar a = a$; $d \bigstar b = b$; $? \bigstar c = c$;

Görülüyor ki, M kümesinin herhangi bir elemanı, $\bigstar$ işlemine göre **d** elemanı ile birleştirilince, yine bu elemanın kendisi bulunuyor. Öyleyse :

d, $\bigstar$ işlemine göre, M kümesinin **etkisiz elemanıdır.**

M kümesi $\bigstar$ işlemine göre **kapalı** mıdır ?

$\bigstar$ işleminin **değişme** ve **birleşme** özelikleri var mıdır?

Genel olarak, bir M kümesinin elemanları arasında uygulanan **ikili işlemi** **T** ile gösterelim.

Her $s \in M$ için

$$s \, T \, e = e \, T \, s = s$$

denkliğini sağlayan bir **e** elemanı varsa, bu **e** elemanına, **T** işlemine göre M kümesinin **etkisiz elemanı** denir.

2. İkili İşleme Göre Bir Elemanın Tersi

Örnekler :

1. $S = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \}$

kümesinde saat aritmetiğine göre tanımladığımız $\oplus$ **işlemini anımsayalım** ve

$$7 \oplus n = n \oplus 7 \equiv 0 \pmod{12}$$

denkliğini sağlayan **n** sayısını arayalım :

Saat aritmetiğinde, toplama ($\oplus$) işlemine göre **yapılan çizelgeden** $n = 5$ bulunur.

Bunun gibi, $9 \oplus y \equiv 0 \pmod{12}$ denkliğine **uyan sayı da** $y = 3$ tür. Öyleyse, S kümesinde herhangi bir **a** sayısı **verildiği zaman**, $\oplus$ işleminde etkisiz eleman 0 olduğuna göre,

$$a \oplus n = n \oplus a \equiv 0 \pmod{12}$$

denkliğine uyan bir $n \in S$ sayısı her zaman vardır. **Bu n sayısına, a** sayısının $\oplus$ işlemine göre **tersi** denir.

2. Doğalsayılar kümesinde, 0 dan başka hiçbir elemanın toplamaya göre **tersi** yoktur.

Gerçekten, $3 \in D$ için $3 + n \equiv 0$ eşitliğini sağlayan bir **n** doğalsayısı yoktur.

3. Doğalsayılar kümesinde çarpma işleminin etkisiz elemanı 1 dir. Bu kümede,

$$4 \times n = n \times 4 = 1$$

eşitliğini sağlayan bir **n** doğalsayısı bulamayız. Öyleyse, doğalsayılar kümesinde, çarpma işlemine göre bir elemanın **tersi** yoktur.

4. Saat aritmetiğinin S kümesinde tanımladığımız $\otimes$ işlemine göre yapılan çizelgeyi inceleyelim.

$$2 \otimes n = n \otimes 2 \equiv 1 \pmod{12}$$

denkliğini gerçekleyen bir $n \in S$ sayısı bulamayız. Demek ki S kümesinde, $\otimes$ işlemine göre, 2 nin tersi yoktur.

$\otimes$ çizelgesine göre, ancak,

$1 \otimes 1 \equiv 1$; $5 \otimes 5 \equiv 1$; $7 \otimes 7 \equiv 1$ $11 \otimes 11 \equiv 1$

dir. Öyleyse, S kümesinde $\otimes$ işlemine göre

1 in **tersi** 1 ; 5 in **tersi** 5 ;

7 nin **tersi** 7 ; 11 in **tersi** 11

olur. S kümesinin öbür elemanlarının $\otimes$ işlemine göre tersleri yoktur.

5. $M = \{ a, b, c, d \}$ kümesinde tanımlanan $\bigstar$ (yıldız) işleminin daha önce verilen çizelgesini inceleyiniz. Bu $\bigstar$ işlemine göre etkisiz elemanın **d** olduğunu biliyoruz. Çizelgeye göre,

$$a \bigstar c = c \bigstar a \equiv d$$

dir. Öyleyse **a** ile **c**, $\bigstar$ işlemine göre birbirinin **tersidir.** **b** ve **d** elemanlarının tersleri nedir?

Genel olarak, bir M kümesinin elemanları arasında uygulanan **ikili işlemi** **T** ile gösterelim. Bu işleme göre etkisiz eleman **e**, kümenin iki elemanı da **a** ve **b** olsun.

$$a \, T \, b = b \, T \, a \equiv e$$

denkliği sağlanıyorsa, kümenin **a** ve **b** elemanları, **T** işlemine göre birbirinin **tersi** olur.

ALIŞTIRMALAR

A Grubu :

1. Rasyonel sayılar kümesinde çarpma işlemine göre **etkisiz eleman** nedir?

2, 3, $\frac{2}{5}$ sayılarının **çarpma** işlemine göre **tersleri** hangi sayılardır?

2. Rasyonel sayılar kümesinde **toplama** işlemine göre **etkisiz eleman** nedir? 0 sayısının **toplama** işlemine göre **tersi** olan eleman hangi sayıdır?

B Grubu :

4. $K = \{ ç, t \}$ kümesi veriliyor. Burada ç, herhangi bir çiftsayıyı, t de, herhangi bir teksayıyı gösteriyor. Bu kümede tanımlanan **toplama** işleminin çizelgesi yanda görülüyor.

⊕	ç	t
ç	ç	t
t	t	ç

a) K kümesi ⊕ işlemine göre **kapalı** mıdır?

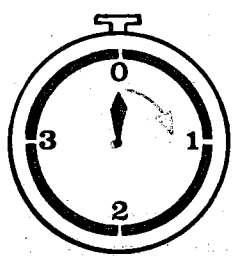
b) ⊕ işleminde **değişme özeliği** var mıdır?

c) K kümesinde, ⊕ işlemine göre, **etkisiz eleman** nedir?

d) K kümesinde, ⊕ işlemine göre, ç nin **tersi** ç ve t nin **tersi** t dir. Niçin?

5. $A = \{ 0, 1, 2, 3 \}$ kümesinde saat aritmetiğine göre tanımlanan toplama (⊕) ve çarpma (⊗) işlemlerinin çizelgelerini tamamlayınız.

4'lü saat



9. Şekil

⊕	0	1	2	3
0		1		3
1				0
2	2		0	
3				2

⊗	0	1	2	3
0	0		0	
1	0	1		3
2			0	
3	0		2	1

a) A kümesi ⊕ ve ⊗ işlemlerine göre kapalı mıdır?

b) A kümesinde, ⊕ işlemine göre, etkisiz eleman nedir? 0, 1, 2, 3 sayılarının bu işleme göre **tersleri** hangi sayılardır?

c) A kümesinde, ⊗ işlemine göre, etkisiz eleman nedir? 0 ve 2 sayılarının bu işleme göre **tersleri** niçin yoktur?

⊗ işlemine göre 1 in **tersi** 1, 3 ün **tersi** 3 olur. Niçin?

d) ⊗ çizelgesine göre, A kümesinin her elemanı 0 ile çarpılınca sonuç ne oluyor? A kümesinde ⊗ işlemine göre **yutan eleman** nedir?

C Grubu :

6. $M = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ kümesi veriliyor. Bu kümede **T** işlemi şöyle tanımlanıyor :

M nin elemanlarından oluşan herhangi bir sayı ikilisi, **T** işlemi ile, bu elemanlar eşitse bunlardan birine, eşit değilse, büyük olana gönderiliyor.

Sözgelişi :

$(1;1) \longmapsto 1$; $(1;2) \longmapsto 2$;

$(3;2) \longmapsto 3$; ...

T	1	2	3	4
1	1	2		4
2	2	2		
3		3	3	4
4			3	4

$1\,T\,1 \equiv 1$; $1\,T\,2 \equiv 2$; $3\,T\,2 \equiv 3$; ...

oluyor. Bu **T** işleminin çizelgesini tamamlayınız.

a) M kümesi **T** işlemine göre **kapalı** mıdır?

b) **T** işleminin **değişme** ve **birleşme** özelikleri var mıdır?

c) **T** işlemine göre **etkisiz eleman** hangi sayıdır?

d) **T** işlemine göre, 1'in **tersi** 1 dir; 2, 3, 4 sayılarının **tersleri** yoktur. Niçin?

e) 4 sayısı, **T** işlemine göre, **yutan elemandır**. Niçin?

1-5. BİR MATEMATİK SİSTEMİ NEDİR?

$D = \{ 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots \}$ doğalsayılar kümesini alalım. Bu küme üzerinde tanımladığımız toplama işlemi ile yine bu kümenin elemanlarını bulduk. Sonra bu işlemin **kapalılık, değişme** ve **birleşme** özeliklerini inceledik. Toplama işleminde etki yapmayan elemanı belirttik.

D kümesi üzerinde tanımladığımız çarpma işlemi için de benzer inceleme ler yaptık. Bütün bu incelemelerde, küme ile bu kümede tanımladığımız işlemleri birlikte düşündük.

Bu bölümde, saat üzerinde işaret edilen sayılardan meydana gelen,

$$S = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \}$$

kümesi üzerinde yeni bir toplama işlemini tanıttık. Bu işlemde, özelikleri incelerken, S kümesini ve yeni toplama işlemini tüm olarak ele aldık. Yeni **toplama** ve **çarpma** ile ilgili bütün örnekleri hep aynı görüşle inceledik.

"Bir küme ile bu kümede tanımlanan bir işlem, bir **matematik sistemi** meydana getirir.

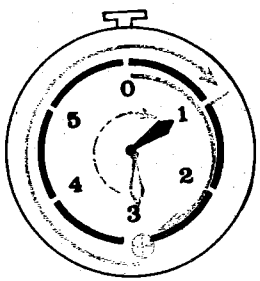
D doğalsayılar kümesi ile bu kümede tanımlanan **toplama işlemi** bir **matematik sistemi** oluşturur.

Saat üzerinde işaret edilen sayılar kümesi ile bu kümede tanımlanan yeni toplama işlemi de bir **matematik sistemi** ortaya koyar.

Uygulama :

$A = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$ kümesi veriliyor. Kümenin elemanları "10. şekilde" görüldüğü gibi bir çember üzerinde gösteriliyor. A kümesinde saat aritmetiğinde olduğu gibi **toplama** işlemi tanımlanıyor.

6'lı saat :



$3 \oplus 4 \equiv 1$

10. Şekil

Bu işlemin çizelgesini yapınız.

a) A kümesinin bu işleme göre **kapalı** olduğunu gösteriniz.

b) İşlemin **değişme özeliği** var mıdır?

c) İşlemin **birleşme özeliği** var mıdır?

d) Bu işleme göre **etkisiz eleman** var mıdır?

e) Bu işleme göre A kümesinde her elemanın **tersi** var mıdır?

Çözüm :

A kümesinde "6'lı saate göre" toplama işlemi şöyle tanımlanıyor :

$0 \oplus 1 \equiv 1$

$4 \oplus 2 \equiv 0$

$5 \oplus 3 \equiv 2$

. . . . . .

. . . . . .

$\oplus$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
1	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

a) Kapalılık Özeliği

Buna göre yapılan toplama çizelgesini yukarıda görüyorsunuz.

$\oplus$ çizelgesinin incelenmesinde görüleceği üzere A kümesinin herhangi iki elemanı arasında uygulanan $\oplus$ işlemi ile bulunan sayı A kümesinin bir elemanıdır. Bu çizelgenin gözlerinde A kümesinde bulunmayan hiç bir sayı yoktur. İşte bu bakımdan A **kümesi** $\oplus$ **işlemine göre kapalıdır** diyoruz.

b) Değişme Özeliği

Çizelgede

$$3 \oplus 5 \equiv 2 \pmod 6 \text{ ve } 5 \oplus 3 \equiv 2 \pmod 6$$

olduğu görülüyor. Öyleyse,

$$3 \oplus 5 = 5 \oplus 3$$

eşitliği yazılabilir. A kümesinden herhangi iki sayıyı seçiniz ve bunlar arasında uygulanan $\oplus$ işleminin sonucunu bulunuz. Sonra sayıların yerlerini değiştiriniz. $\oplus$ işlemi ile yine aynı sonucu bulursunuz.

Genel olarak, her $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$ için

$$\mathbf{a} \oplus \mathbf{b} \equiv \mathbf{b} \oplus \mathbf{a}$$

eşitliği yazılır.

Bu özeliğe, $\oplus$ işleminin **değişme özeliği** diyoruz.

c) Birleşme Özeliği

$2, 3, 5 \in A$ için,

$3 \oplus (5 \oplus 2)$

işlemini göz önüne alalım. Çizelgeye göre,

$5 \oplus 2 \equiv 1 \pmod 6$ ve $3 \oplus 1 \equiv 4 \pmod 6$

bulunur.

$$(3 \oplus 5) \oplus 2$$

işlemi için de

$3 \oplus 5 \equiv 2 \pmod 6$ dır ve $2 \oplus 2 \equiv 4 \pmod 6$

bulunur. Demek ki, (1) ve (2) işlemlerinin sonuçları birbirine eşittir. Buradan,

$$3 \oplus (5 \oplus 2) = (3 \oplus 5) \oplus 2$$

eşitliğini yazabiliriz. A kümesinin öbür elemanları için de buna benzer bir eşitlik yazılabileceğini gösteriniz.

Genel olarak, her $a, b, c \in A$ için

$$a \oplus (b \oplus c) \equiv (a \oplus b) \oplus c$$

eşitliği vardır.

Bu özeliğe, $\oplus$ işleminin **birleşme özeliği** diyoruz.

d) Etkisiz Eleman

$5 \in A$ için $5 \oplus \square \equiv 5$ denkliğini sağlayan $\square$ sayısını çizelgede arayalım :

Hemen görüleceği üzere $\square = 0$ dır. Bunun gibi, $3 \oplus \square \equiv 3$ denkliğini sağlayan $\square$ sayısı $\square = 0$ dır.

Genel olarak, A kümesinin herhangi bir elemanı a olsun.

$$a \oplus \square \equiv a$$

denkliğini sağlayan $\square$ sayısı, $\square = 0$ dır. Bundan anlaşılıyor ki, $\square = 0$ sayısının A kümesinde tanımladığımız $\oplus$ işlemine etkisi yoktur. Bu nedenle,

0 sayısına, $\oplus$ işlemine göre **etkisiz eleman** diyoruz.

e) Ters Eleman

Şimdi $5 \oplus \Delta \equiv 0$ denkliğini sağlayan Δ elemanını arayalım :

$\oplus$ çizelgesinde görüleceği gibi, $\Delta = 1$ dir. Bu 1 sayısına, 5 sayısının $\oplus$ işlemine göre **tersi** denir.

Bunun gibi, $3 \oplus m \equiv 0$ denkliğini sağlayan m sayısı da $m = 3$ olur. Demek ki 3 ün $\oplus$ işlemine göre **tersi** yine 3 tür.

$4 \oplus n \equiv 0$ denkliğini sağlayan sayı da $\oplus$ çizelgesinden $n = 2$ olarak bulunur. Bu 2 sayısı, $\oplus$ işlemine göre 4 ün **tersidir.**

Genel olarak, $a \in A$ için $a \oplus \square \equiv 0$ denkliğini sağlayan bir $\square$ sayısı A kümesinde her zaman vardır. $\square$ sayısına, a sayısının $\oplus$ işlemine göre **tersi** diyoruz.

A kümesi üzerinde saat aritmetiğine göre tanımlanan **toplama** işleminin çok çeşitli özelikleri olduğunu gördük. Bu işlemle donatılmış olan A kümesi bir **matematik sistemi** oluşturur. Bu sistem, $(A, \oplus)$ biçiminde gösterilir.

Bu örnekte olduğu gibi, bir M kümesinde bir $\bigstar$ işlemi tanımlandığı zaman :

a) M kümesi $\bigstar$ işlemine göre **kapalı** ise,

b) $\bigstar$ işleminin **birleşme özeliği** varsa,

c) M kümesinde, $\bigstar$ işlemine göre **etkisiz eleman** varsa,

d) M kümesinde, $\bigstar$ işlemine göre, her elemanın **tersi** bulunuyorsa,

"$\bigstar$ işlemiyle donatılan M kümesi, bir **grup** yapısındadır" deriz. Bunu kısaca,

"$(M, \bigstar)$ sistemi bir **gruptur**"

diyerek belirtiriz.

Eğer, $\bigstar$ işleminin değişme özeliği de varsa, bu durumda $(M, \bigstar)$ sistemine **değişmeli grup** adı verilir.

Yukarıda belirttiğimiz $(A, \oplus)$ sistemi bir **değişmeli gruptur.**

ALIŞTIRMALAR

A Grubu :

1. D doğalsayılar kümesinde tanımlanan **toplama** $(+)$ işleminin **kapalılık, birleşme** ve **değişme** özelikleri var mıdır? Toplama işlemine göre **etkisiz eleman** nedir? D kümesinde, $+$ işlemine göre her elemanın **tersi** neden yoktur.

$(D, +)$ sistemi neden bir **grup** değildir?

2. D doğalsayılar kümesinde tanımlanan çarpma $(\times)$ işleminin hangi özelikleri vardır?

D kümesinde, $\times$ işlemine göre, her elemanın **tersi** var mıdır?

$(D, \times)$ sistemi neden bir **grup** değildir?

3. R rasyonel sayılar kümesinde tanımlanan çarpma ($\times$) işleminin hangi özelikleri vardır? Her rasyonel sayının $\times$ işlemine göre tersi yine bir rasyonel sayı mıdır?

(R, $\times$) sistemi bir **değişmeli grup** olur. Niçin?

4. Buraya kadar yaptığımız çizelgelerle verilen işlemleri inceleyiniz. Bu işlemlerin hangi özeliklerinin bulunduğunu belirtiniz.

B Grubu :

5. Aşağıda çizelgelerle verilen işlemleri inceleyiniz. Bu işlemlere göre verilen kümeler **kapalı** mıdır?

(a) $A = \{ a , b \}$

★	a	b
a	a	b
b	a	b

(b) $B = \{ \square, \Delta, \bigcirc \}$

T	□	Δ	○
□	□	Δ	○
Δ	Δ	○	□
○	○	□	Δ

(c) $C = \{ 1, 2, 3, 4, \}$

⊕	1	2	3	4
1	2	3	4	1
2	3	4	1	2
3	4	1	2	3
4	1	2	3	4

6. Aşağıdaki denklikleri yukarıdaki çizelgelere göre tamamlayınız.

a) $a \bigstar a \equiv ?$
$a \bigstar ? \equiv b$
$b \bigstar ? \equiv a$
$? \bigstar b \equiv b$

b) $\square \, T \, \square \equiv ?$
$? \, T \, \square \equiv \Delta$
$\Delta \, T \, \bigcirc \equiv ?$
$\bigcirc \, T \, ? \equiv \bigcirc$
$? \, T \, \bigcirc \equiv \bigcirc$

c) $1 \oplus 4 \equiv ?$
$2 \oplus ? \equiv 2$
$? \oplus 2 \equiv 1$
$3 \oplus ? \equiv 3$
$4 \oplus ? \equiv 4$

C Grubu :

7. Yukarıda verilen ★ , T , ⊕ işlemlerinden hangilerinin **değişme özeliği** vardır?

8. Yukarıda verilen ★ , T , ⊕ işlemlerinden hangilerinin **birleşme özeliği** vardır?

9. Bu ★ , T , ⊕ işlemlerinin hangileri için **etkisiz eleman** vardır?

10. Bu işlemlerin hangilerine göre, bir elemanın **tersi** vardır?

11. (A , ★) ; (B , T) ; (C , ⊕) sistemlerinden hangileri **grup** ya da **değişmeli grup** yapısındadır?

1-6. MODÜLER ARİTMETİK

$A = \{ 0 , 1 , 2 , 3 \}$ kümesini alalım. Bu kümenin elemanları şekilde görüldüğü gibi bir çember üzerinde gösterilmiştir. A kümesi üzerinde, saat aritmetiğine göre **toplama** işlemi tanımlanıyor :

$2 \oplus 3 \equiv 1$; $3 \oplus 3 \equiv 2$; ...

gibi. Bu toplamaları, "4'lü saat" üzerinde yaptığımızı belirtmek için

$2 \oplus 3 \equiv 1 \pmod 4$

biçiminde gösteriyoruz ve

"4 modülüne göre, 2 ile 3'ün toplamı 1 'e **denktir**"

diye okuyoruz.

Bunu daha kısa olarak,

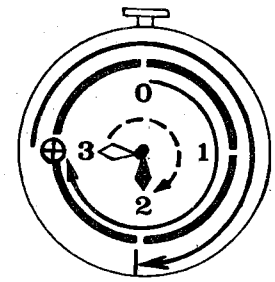
"2 **artı** 3 , 1 ' e **denktir** (modül 4)"

diye de okuyabileceğimizi daha önce belirtmiştik. Bunun gibi,

$3 \oplus 3 \equiv 2 \pmod 4$

yazılır.

4 'lü saat



$3 \oplus 3 \equiv 2$

11. Şekil

Burada A kümesinin 0 , 1 , 2 , 3 elemanlarını kullanarak, saat aritmetiğine göre, **toplama** işlemini tanımladık. Bu işlem, 4 modülüne göre bir aritmetik işlemidir.

Bu işlemi, doğalsayılara nasıl uygularız?

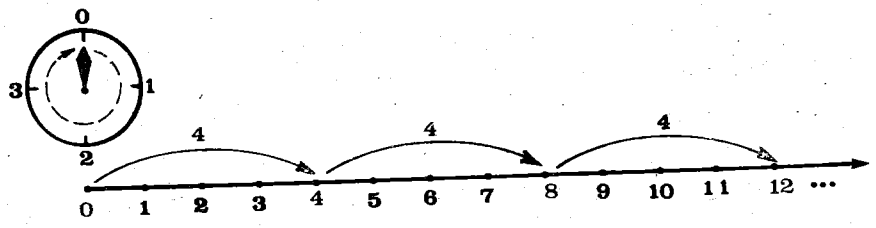
Biliyoruz ki, "4 'lü saatte" çember 4 eş yaya ayrılır. İbre, saat üzerinde bu eş yaylardan birisi kadar ilerleyince **bir adım** ilerlemiş sayılır.

İbre 0 'da dursun. "11. şekilde" okla gösterilen yönde 4 adım ilerleyince ibre yine 0 'a gelir. Oysa sayı doğrusu üzerinde, 0 'dan başlayarak 4 adım ilerleyince 4 ile eşleşen noktaya geliriz. İbre 4 adım daha ilerlediği zaman yine 0 'a gelir. Oysa sayı doğrusu üzerinde, 8 ile eşleşen noktaya geliriz.

İşlem böyle sürdürülürse, saat aritmetiği doğalsayılar kümesine uygulandığı zaman 4 , 8 , 12 , 16 ; ... sayılarının "4 modülüne"

göre hep 0 sayısına **denk** oldukları anlaşılır. Bunu şöyle gösteririz :

$$0 \equiv 4 \equiv 8 \equiv 12 \equiv 16 \ldots \pmod 4 .$$



12. Şekil

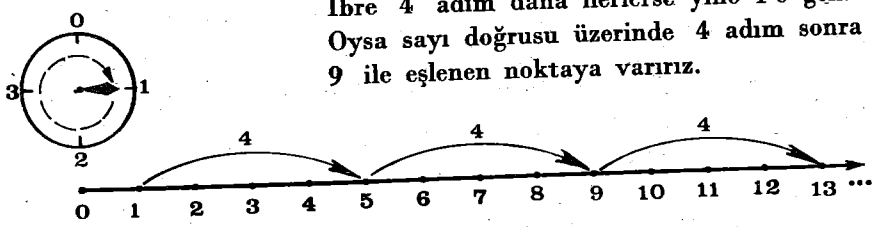
Bu sayıların oluşturduğu küme

$$\{0, 4, 8, 12, 16, \ldots\}$$

dır. 0, bu kümenin bir belirticisidir. Bu kümeyi, kısaca

$0 \pmod 4$ ile gösteririz.

"4'lü saatin" ibresi, 1 de dursun. Sayı doğrusu üzerinde 1 de duralım. İbre 1'den başlayarak 4 adım ilerleyince yine 1'e gelir. Sayı doğrusu üzerinde ise 5 ile eşleşen noktaya geliriz. İbre 4 adım daha ilerlerse yine 1'e gelir. Oysa sayı doğrusu üzerinde 4 adım sonra 9 ile eşlenen noktaya varırız.



13. Şekil

İşlem böylece sürdürülürse, 5 , 9 , 13 , 17 , ... doğalsayılarının "4 modülüne" göre hep 1'e **denk** olduklarını anlarız. Bunu da şöyle gösteririz :

$$1 \equiv 5 \equiv 9 \equiv 13 \equiv 17 \equiv \ldots \pmod 4 .$$

Bu sayıların oluşturduğu küme de kısaca şöyle gösterilir :

$$1 \pmod 4 = \{1, 5, 9, 13, 17, \ldots\} .$$

Benzer, düşünce ile, "4 modülüne" göre, 2 ye **denk** olan sayılar da şöyle gösterilir :

$$2 \equiv 6 \equiv 10 \equiv 14 \equiv 18 \equiv \ldots \pmod 4 .$$

Bu sayıların oluşturduğu kümeyi kısaca $2 \pmod 4$ ile gösteririz.

Siz de "4 modülüne" göre, 3'e **denk** olan doğalsayıları söyleyiniz.

İşte böyle, saat aritmetiğinin doğalsayılar kümesine uygulanmasına **modüler aritmetik** diyoruz.

Doğalsayıların belirli bir şekilde sınıflandırılması sonunda **modüler sistemler** meydana gelir. Sözgelişi, doğalsayıları çiftsayılar ve teksayılar diye iki sınıfa ayırsak,

"2 modülüne" göre :

0 , 2 , 4 , 6 , 8 , ... sayıları birbirine **denk,**

1 , 3 , 5 , 7 , 9 , ... sayıları da birbirine **denk**

olurlar.

Gerçekten, $A = \{0, 1\}$ kümesinin elemanlarını bir çemberin üzerine yazarak 2 'li bir saat elde edelim.

Bu 2 'li saatin ibresi 0 'da dursun. 2 adım sonra ibre yine 0 'a gelir. Oysa sayı doğrusu üzerinde 0 'dan 2 adım sonra 2 ile eşleşen noktaya geliriz. Öyleyse,

$$0 \equiv 2 \pmod 2 \text{ dir.}$$

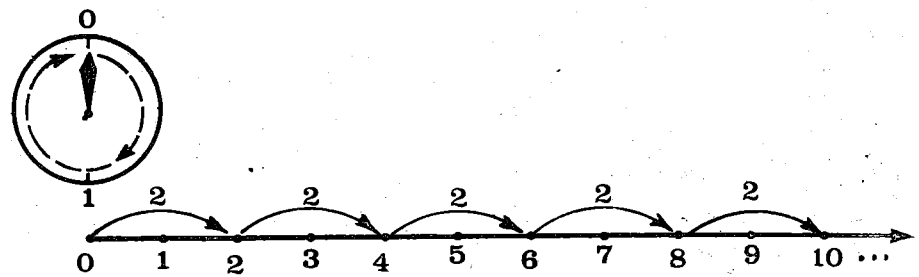
"2 'li saatin" ibresi 2 adım daha ilerlerse yine 0 'da gelir. Oysa sayı doğrusu üzerinde 2 'den 2 adım sonra 4 ile eşleşen noktaya geliriz. İşlem böylece sürdürülürse,

$$0 \equiv 2 \equiv 4 \equiv 6 \equiv 8 \equiv \ldots \pmod 2$$

olduğu anlaşılır. Buna göre,

$$0 \pmod 2 = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

yazılır.



14. Şekil

"2 'li saatin" ibresi 1 üzerinde dursun. İbre 2 adım ilerlerse yine 1 'e gelir. Oysa sayı doğrusu üzerinde 1 'den 2 adım sonra 3 ile eşleşen noktaya geliriz. Öylerse,

$$1 \equiv 3 \pmod 2 \text{ dir.}$$

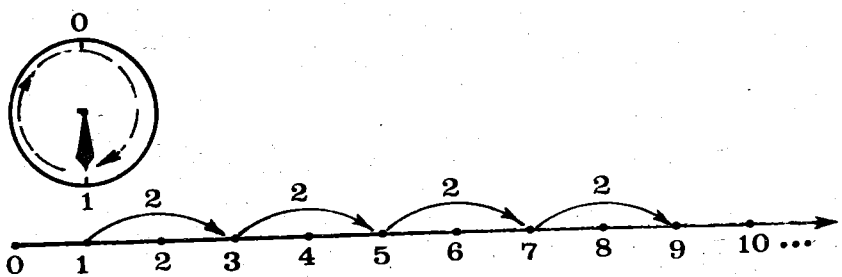
İşlem böyle sürdürülürse,

$$1 \equiv 3 \equiv 5 \equiv 7 \equiv 9 \ldots \pmod 2$$

olduğu anlaşılır.

"2 modülüne" göre 1'e **denk** olan bu sayıların oluşturduğu kümeyi de şöyle gösteririz :

$$1 \pmod 2 = \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}.$$



15. Şekil

0 'dan başlayarak üçer üçer ilerleyen sayıları bir sınıfa;

1 'den başlayarak üçer üçer ilerleyen sayıları bir sınıfa ve

2 'den başlayarak üçer üçer ilerleyen sayıları da başka bir sınıfa koyarak, **(mod. 3) sistemini** elde etmiş oluruz.

KARIŞIK ALIŞTIRMALAR

A Grubu :

1. "3 modülüne" göre 0 sayısına **denk** olan doğalsayıların oluşturduğu kümeyi yazınız.

2. "3 modülüne" göre 1 sayısına **denk** olan doğalsayıların oluşturduğu kümeyi yazınız.

3. "3 modülüne" göre 2 sayısına **denk** olan doğalsayıların oluşturduğu kümeyi yazınız.

4. "5 modülüne" göre, 0, 1, 2, 3, 4 sayılarına ayrı ayrı **denk** olan doğalsayıların oluşturduğu kümeleri yazınız.

B Grubu :

5. $A = \{0, 1, 2, 3\}$ kümesinde "4 modülüne" göre **çarpma** ($\otimes$) işlemi tanımlanıyor. Bu işlemin çizelgesini yapınız. Sonra aşağıdaki soruları yanıtlayınız. :

a) Küme bu işleme göre **kapalı** mıdır?

b) İşlemin **değişme özeliği** var mıdır?

c) İşlemin **birleşme özeliği** var mıdır?

d) Bu işleme göre, **etkisiz eleman** nedir?

e) Bu işleme göre, hangi elemanların **tersleri** vardır?

6. Aşağıdaki denklikleri tamamlayınız :

a) $3 \oplus (2 \oplus 1) \equiv ? \pmod 4$; **b)** $(3 \oplus 2) \oplus 1 \equiv ? \pmod 4$;

c) $2 \otimes (3 \otimes 1) \equiv ? \pmod 4$; **d)** $(2 \otimes 3) \otimes 1 \equiv ? \pmod 4$.

7. Aşağıdaki denklikleri tamamlayınız.

a) $3 \oplus ? \equiv 2 \oplus 3 \pmod 4$; **b)** $2 \otimes ? \equiv 3 \otimes 3 \pmod 4$;

c) $3 \otimes (2 \oplus 3) \equiv ? \pmod 4$; **d)** $(2 \oplus 1) \otimes 3 \equiv ? \pmod 4$.

8. Saat aritmetiğinde (mod. 12) ve toplama işlemi $\oplus$, çarpma işlemi de $\otimes$ ile gösterildiğine göre, aşağıdaki soruları yanıtlayınız :

a) $5 \oplus 3 = 3 \oplus 5$ eşitliği doğru mudur?

b) $6 \oplus 5 = 5 \oplus 6$ eşitliği doğru mudur?

c) $(3 \oplus 4) \oplus 2 = 3 \oplus (4 \oplus 2)$ eşitliği doğru mudur?

d) $3 \oplus (3 \oplus 2) \equiv ?$

e) $(3 \oplus 3) \oplus (3 \oplus 2) \equiv ?$

f) $3 \otimes (3 \oplus 2) = (3 \otimes 3) \oplus (3 \otimes 2)$ eşitliği doğrumudur?

9. Yukarıda **f** sorusundaki eşitlik, **çarpmanın toplama üzerine dağılma özeliğini** gösteriyor. Bu özeliği, doğalsayılarda çarpmanın toplama üzerine dağılma özeliği ile karşılaştırınız.

C Grubu :

10. Saat aritmetiğinde (mod. 12) toplama işlemi $\oplus$ ve çarpma işlemi $\otimes$ ile gösterildiğine göre, toplamanın çarpma üzerine **dağılma özeliğinin** olup olmadığını aşağıdaki örnek üzerinde gösteriniz :

$$3 \oplus (5 \otimes 2) \stackrel{?}{=} (3 \oplus 5) \otimes (3 \oplus 2)$$

11. Saat aritmetiğinde (mod. 12) çarpma çizelgesinden yararlanmadan aşağıdaki çarpmaları bulunuz :

a) $6 \otimes 5$; **b)** $8 \otimes 4$; **c)** $3 \otimes 3$; **d)** $9 \otimes 2$;
e) $7 \otimes 3$; **f)** $5 \otimes 3$; **g)** $10 \otimes 9$; **h)** $9 \otimes 10$;
i) $7 \otimes 7$; **j)** $11 \otimes 11$.

Yol gösterme :

a) Doğalsayılarda $6 \times 5 = 30$ dur. Bu doğalsayı, "12 modülüne" göre hangi sayıya **denk** olur?

Bunu bulmak için 30 'un içinden 12 nin katları atılır.

$30 - 24 = 6$ dır. Öyleyse,

$$30 \equiv 6 \pmod{12}$$

dir. Buna göre,

$$6 \otimes 5 \equiv 6 \pmod{12}$$

olur. Öbür soruları da bunun gibi yapınız.

12. Saat aritmetiğinde (mod. 12) $\oplus$ toplama ve $\otimes$ çarpma işlemini gösterdiğine göre, aşağıdaki işlemleri yapınız :

a) $(6 \oplus 5) \otimes (6 \oplus 3)$; **b)** $(6 \oplus 6) \otimes (6 \oplus 2)$;
c) $(6 \oplus 6) \otimes (6 \oplus 4)$; **d)** $(10 \oplus 6) \otimes 5$.

13. Saat aritmetiğinde (mod. 12) ve toplama işlemi $\oplus$, çarpma işlemi $\otimes$ ile gösterildiğine göre, aşağıdaki işlemleri yapınız :

a) $(2 \oplus 7) \oplus 1$; **b)** $2 \oplus (7 \otimes 1)$;
c) $(3 \oplus 7) \otimes 1$; **d)** $(2 \oplus 4) \oplus 6$;
e) $4 \oplus (2 \oplus 6)$; **f)** $(6 \oplus 6) \otimes (5 \oplus 4)$;
g) $6 \oplus (4 \oplus 6)$; **h)** $(8 \oplus 5) \otimes (8 \oplus 4)$.

14. $K = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ kümesinin elemanları bir çember üzerine yazılıyor. Ve bu küme üzerinde saat aritmetiğinin toplama işlemi tanımlanıyor. (mod. 5) tir.

a) İşlemin çizelgesini yapınız.

b) Bu işlemin **değişme** ve **birleşme özeliklerini** inceleyiniz.

c) Toplama işlemine göre **etkisiz elemanı** bulunuz.

d) Toplama işlemine göre, K kümesinde her elemanın **tersi** var mıdır?

e) Toplama işlemine göre aşağıdaki **denklikleri** sağlayan sayıları bulunuz :

1) $3 \oplus m \equiv 0 \pmod{5}$
2) $4 \oplus n \equiv 0 \pmod{5}$
3) $2 \oplus p \equiv 1 \pmod{5}$
4) $1 \oplus s \equiv 2 \pmod{5}$
5) $4 \oplus y \equiv 3 \pmod{5}$
6) $u \oplus 3 \equiv 0 \pmod{5}$
7) $v \oplus 4 \equiv 1 \pmod{5}$
8) $x \oplus 2 \equiv 3 \pmod{5}$
9) $y \oplus 4 \equiv 4 \pmod{5}$
10) $z \oplus 3 \equiv 4 \pmod{5}$

f) $(K, \oplus)$ sistemi, bir **değişmeli grup** mudur?

15. $K = \{0 , 1 , 2 , 3 , 4\}$ kümesi üzerinde saat aritmetiğine göre **çarpma** işlemi tanımlanıyor. Bu işlemin çizelgesini tamamlayınız.

a) Bu çizelgeye göre aşağıdaki çarpmaları yapınız :

1) $3 \otimes 2 \equiv ? \pmod{5}$
2) $3 \otimes 4 \equiv ? \pmod{5}$
3) $2 \otimes 4 \equiv ? \pmod{5}$
4) $0 \otimes 3 \equiv ? \pmod{5}$
5) $1 \otimes 4 \equiv ? \pmod{5}$
6) $3 \otimes 3 \equiv ? \pmod{5}$
7) $4 \otimes 4 \equiv ? \pmod{5}$
8) $2 \otimes 3 \equiv ? \pmod{5}$

$\otimes$	0	1	2	3	4
0	0				0
1		1	2		
2	0			1	
3	0		1	4	2
4			3		1

b) Çarpma çizelgesine göre aşağıdaki denkliklerde s 'nin değerlerini bulunuz.

1) $3 \otimes s \equiv 1 \pmod{5}$
2) $3 \otimes s \equiv 2 \pmod{5}$
3) $2 \otimes s \equiv 3 \pmod{5}$
4) $4 \otimes s \equiv 2 \pmod{5}$
5) $s \otimes 2 \equiv 1 \pmod{5}$
6) $s \otimes 3 \equiv 4 \pmod{5}$
7) $s \otimes 3 \equiv 1 \pmod{5}$
9) $s \otimes 4 \equiv 3 \pmod{5}$

c) $(K, \otimes)$ sistemi **değişmeli grup** özeliklerini taşıyor mu?

KENDİMİZİ DENEYELİM

TEST SORULARI

(Doğru olan yanıtın solundaki kutuya × işareti koyunuz).

1. $3 \oplus 4 \equiv \Delta \pmod 5$

işleminde Δ işareti yerine aşağıdaki sayılardan hangisini koymalıdır?

☐ **a)** 1 ; ☐ **b)** 3 ; ☐ **c)** 2 ; ☐ **d)** 0 ; ☐ **e)** 4.

2. $3 \oplus \Delta \equiv 2 \pmod 4$

işleminde Δ yerine aşağıdaki sayılardan hangisini koymalıdır?

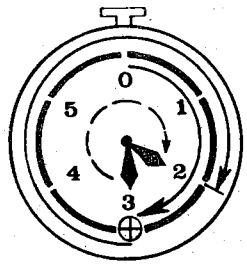
☐ **a)** 2 ; ☐ **b)** 3 ; ☐ **c)** 1 ; ☐ **d)** 0 ; ☐ **e)** Hiçbiri.

3. "16. şekle" göre yapılan

$3 \oplus 5 \equiv 2 \pmod \Delta$

işleminde Δ işaretinin yerine şunlardan hangisini koymalıdır?

☐ **a)** 4 ; ☐ **b)** 0 ;
☐ **c)** 5 ; ☐ **d)** 7;
☐ **e)** Hiçbiri.



16. Şekil

4. $2 \oplus 4 \equiv \Delta \pmod 5$

işleminde Δ işareti yerine aşağıdaki sayılardan hangisini koymalıdır?

☐ **a)** 2 ; ☐ **b)** 0 ; ☐ **c)** 3 ; ☐ **d)** 1 ; ☐ **e)** 4.

5. Yanda çizelgesini gördüğünüz ★ işleminde **etkisiz eleman** hangi sayıdır?

★	1	2	3	4
1	2	3	4	1
2	3	4	1	2
3	4	1	2	3
4	1	2	3	4

☐ **a)** 2 ; ☐ **b)** 1 ; ☐ **c)** 3 ;
☐ **d)** 4 ; ☐ **e)** Hiçbiri.

6. "5. soruda" çizelgesini gördüğünüz ★ işlemine göre 2 nin **tersi** olan **eleman** hangi sayıdır?

☐ **a)** 1 ; ☐ **b)** 2 ; ☐ **c)** 3 ; ☐ **d)** 4 ; ☐ **e)** Böyle bir sayı yoktur.

7. Yukarıda çizelgesi görülen ★ işlemine göre

$(3 \bigstar 2) \bigstar 4 = 3 \bigstar (2 \bigstar 4)$

eşitliği, ★ işleminin hangi özeliğini anlatır?

☐ **a)** Değişme ; ☐ **b)** Birleşme ; ☐ **c)** Dağılma ;
☐ **d)** Etkisiz elemanın varlığını ; ☐ **e)** Ters elemanın varlığını.

8. $A = \{0, 1, 2, 3\}$ kümesinin elemanları arasında 4 modülüne göre yapılan çarpma ($\otimes$) çizelgesi yanda görülüyor.

⊗	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	1	2
3	0	3	2	1

Bu çizelgeye göre

$3 \otimes \Delta \equiv 1 \pmod 4$

denkliğini sağlayan Δ nın değeri nedir?

☐ **a)** 0 ; ☐ **b)** 1 ; ☐ **c)** 2;
☐ **d)** 3 ; ☐ **e)** Hiçbiri.

9. $(3 \oplus 2) \otimes 2 \equiv \Delta \pmod 4$

denkliğini sağlayan Δ nın değeri nedir?

☐ **a)** 0 ; ☐ **b)** 1 ; ☐ **c)** 2 ; ☐ **d)** 3 ; ☐ **e)** Hiçbiri.

10. $(2 \oplus 2) \oplus (2 \otimes 3) \equiv \Delta \pmod 4$

denkliğini sağlayan Δ nın değeri nedir?

☐ **a)** 0 ; ☐ **b)** 1 ; ☐ **c)** 2 ; ☐ **d)** 3 ; ☐ **e)** Hiçbiri.

11. 1 Ocak 1978 günü **pazardır**. 12 Ocak 1978 tarihi hangi güne rastlar?

☐ **a)** Salı ; ☐ **b)** Çarşamba ; ☐ **c)** Pazar ; ☐ **d)** Perşembe;
☐ **e)** Cuma .

12. Saat aritmetiğinde (mod. 12) ve toplama işlemi $\oplus$, çarpma işlemi de $\otimes$ ile gösterildiğine göre

$(9 \oplus 5) \otimes 8$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

☐ **a)** 0 ; ☐ **b)** 3 ; ☐ **c)** 7 ; ☐ **d)** 5 ; ☐ **e)** 4 .

13. $A = \{\Delta, \square, \bigcirc\}$ kümesinin elemanları arasında yandaki çizelge ile tanımlanan ★ işlemi verilmiştir. Aşağıdaki anlatımlardan hangisi yanlıştır?

★	Δ	□	○
Δ	Δ	□	○
□	□	○	Δ
○	○	Δ	□

☐ **a)** A kümesi ★ işlemine göre kapalıdır.
☐ **b)** ★ işleminde **etkisiz eleman** Δ dır.
☐ **c)** □ elemanının ★ işlemine göre **tersi** olan eleman ○ dır.
☐ **d)** ★ işleminin değişme özeliği vardır.
☐ **e)** A kümesi ★ işlemine göre kapalı değildir.

14. Saat aritmetiğinde (mod. 12) ⊕ toplama ve ⊗ çarpma işlemini gösterdiğine göre,

$$(6 \oplus 6) \otimes (6 \oplus 2)$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

☐ **a)** 0 ; ☐ **b)** 6 ; ☐ **c)** 8 ; ☐ **d)** 2 ; ☐ **e)** Hiçbiri.

15. Bir duvar saatı 6 günde bir kuruluyor. Saat, ilk kez **pazar** günü kurulduğuna göre, saatın beşinci kuruluşu hangi güne rastlar?

☐ **a)** Pazartesi ; ☐ **b)** Salı ; ☐ **c)** Çarşamba ;
☐ **d)** Perşembe ; ☐ **e)** Cumartesi.

Yol gösterme :

Başlangıç
↓

0	1	2	3	4	5	6
Pazar	**Pazartesi**	**Salı**	**Çarşamba**	**Perşembe**	**Cuma**	**Cumartesi**

7 li saat aritmetiğinde

$$5 \otimes 6 \equiv ? \pmod 7$$

denkliğinde ? işareti yerine konulacak sayı, aranılan günün karşılığıdır.

16. $a \Delta b = b \Delta a$ eşitliği Δ işleminin hangi özeliğini anlatır?

☐ **a)** Birleşme özeliği ; ☐ **b)** Değişme özeliği ;
☐ **c)** Dağılma özeliği ; ☐ **d)** Ters elemanın varlığını ;
☐ **e)** Etkisiz elemanın varlığını.

17. Δ ve ★, A kümesinde tanımlanmış olan iki işlemdir. $a, b, c \in A$ olduğuna göre aşağıdaki eşitlik hangi özeliği anlatır?

$$a \Delta (b \star c) = (a \Delta b) \star (a \Delta c).$$

☐ **a)** Birleşme özeliği ; ☐ **b)** Değişme özeliği ;
☐ **c)** Dağılma özeliği ; ☐ **d)** Etkisiz elemanın varlığını ;
☐ **e)** Hiçbiri.

18. $2^2 \oplus x \equiv 1 \pmod 6$ eşitliğini sağlayan x'in değeri nedir?

☐ **a)** 2 ; ☐ **b)** 4 ; ☐ **c)** 3 ; ☐ **d)** 1 ; ☐ **e)** Hiçbiri.

19. $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ kümesinde elemanlar arasında 5 modülüne göre ⊕ ve ⊗ işlemleri tanımlanıyor.

$4 \otimes (3 \oplus 4)$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

☐ **a)** 2 ; ☐ **b)** 3 ; ☐ **c)** 1 ; ☐ **d)** 4 ; ☐ **e)** Hiçbiri.

20. Rasyonel sayılar kümesinde $1\frac{2}{3}$ sayısının çarpmaya göre **tersi** olan sayı nedir?

☐ **a)** $\frac{1}{3}$; ☐ **b)** $\frac{3}{4}$; ☐ **c)** $\frac{3}{5}$; ☐ **d)** $\frac{5}{4}$; ☐ **e)** $\frac{5}{2}$.

2. BÖLÜM
RASYONEL SAYILAR

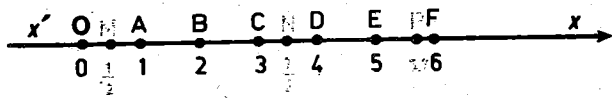
Konunun Ayrıntıları

2–1. Sayı Doğrusu
2–2. Negatif Tamsayılar ve Negatif Rasyonel Sayılar (Yönlü Sayılar)
2–3. Rasyonel Sayılarla Toplama İşlemi
2–4. Bir Noktanın Koordinatı
2–5. Grafikler
2–6. Rasyonel Sayılarla Çarpma İşlemi
2–7. Rasyonel Sayılarla Bölme İşlemi
2–8. Rasyonel Sayılarla Çıkarma İşlemi

2–1. SAYI DOĞRUSU

Bir x'x doğrusu üzerinde değişmeyen bir O noktası alalım (1. şekil). [Ox ışını üzerinde :

|OA| = 1 cm., |OB| = 2 cm., |OC| = 3 cm., |OD| = 4 cm., |OE| = 5 cm., ... eşitlikleri ile belli A, B, C, D, E, ... noktaları alınırsa, O noktası 0 (sıfır) sayısının, A noktası 1, B noktası 2, C noktası 3, D noktası 4 ve E noktası da 5 sayısının **görüntüleri** olur.



1. Şekil

$|OM| = \frac{1}{2}$ cm., $|ON| = \frac{7}{2}$ cm., ve |OP| = 5,7 cm.

eşitliklerine göre M, N, P noktaları, alınırsa M noktası $\frac{1}{2}$, N noktası $\frac{7}{2}$ kesrinin ve P noktası da 5,7 ondalık sayısının **görüntüleridir.** (Burada uzunluk birimi 1 cm. seçilmiştir.)

Bu yöntemle, her doğalsayı ya da rasyonel sayıya karşılık, sayı doğrusu üzerinde bir noktanın bulunabileceği anlaşılır.

2 cm. > 1 cm. olduğundan "1. şekilde" B noktası A nın sağında; 3 cm. > 2 cm. olduğu için C noktası B nin sağındadır.

Bunun gibi, $\frac{7}{2}$ cm. < 5,7 cm. olduğundan P noktası N nin sağında bulunur.

Böylece, iki sayıdan hangisi büyükse, onun sayı doğrusu üzerindeki görüntü noktası, öbürünün görüntü noktasının sağında bulunur. Sayılar büyüdükçe bunların sayı doğrusu üzerindeki görüntü noktaları da, biri, öbürünün sağında kalacak şekilde dizilir.

Karesi 2 olan bir doğalsayı bulunabilir mi? Bundan başka karesi 2 olan bir rasyonel sayının da bulunmadığı deneme ile anlaşılır. Söz gelişi,

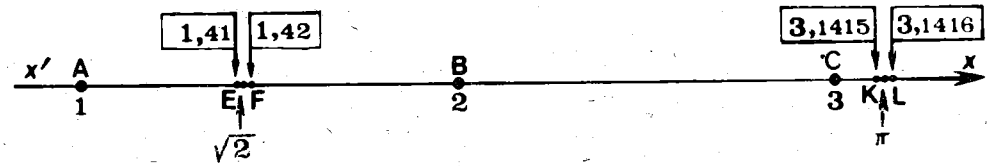
$$1{,}4 \times 1{,}4 = 1{,}96 < 2 \quad \text{ve} \quad 1{,}41 \times 1{,}41 = 1{,}9881 < 2$$

dir. Burada, 1,41 sayısının karesinin 2 ye daha yakın olduğu görülüyor. Öte yandan,

$$1{,}42 \times 1{,}42 = 2{,}0164 > 2$$

dir. Bu kez de 1,42 nin karesinin 2 den daha büyük olduğu görülüyor. Öyleyse, karesi 2 olan sayının, 1,41 ile 1,42 ondalık sayıları arasında, olacağı anlaşılıyor. Virgülden sonraki ondalık basamak sayısı ne kadar çoğaltılırsa çoğaltılsın yine karesi 2 olan bir rasyonel sayı yoktur.

Bir kesir şeklinde gösterilemeyen ve karesi 2 olan bu sayıyı $\sqrt{2}$ biçiminde yazacağız ve "**karekök iki**" diye okuyacağız. Bu sayının, sayı soğrusu üzerindeki görüntüsü 1,41 ile 1,42 sayılarının görüntüleri arasında bir yerde bulunur (2. şekil).



2. Şekil

Aynı şekilde, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ gibi sayılar için de sayı doğrusu üzerinde birer nokta vardır.

Yarıçapı $\frac{1}{2}$ olan bir çemberin uzunluğu

$$2 \times \frac{1}{2} \times \pi = \pi$$

ye eşittir. Bir çemberin çevresinin çapına oranı olan π sayısının 3,1415 ile 3,1416 arasında bir sayı olduğunu biliyoruz. Öyleyse, sayı doğrusu üzerinde π sayısının görüntüsü olan bir nokta da vardır. Bu nokta 3,1415 ve 3,1416 sayılarının görüntü noktaları arasındadır (2. şekil).

Bir rasyonel sayı ile gösterilemeyen $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ..., π sayıları gibi sayılara **rasyonel olmayan** sayılar denir.

Rasyonel sayılar ve rasyonel olmayan sayıların oluşturduğu kümeye **gerçek sayılar** kümesi diyoruz ve bunu G ile gösteriyoruz.

ALIŞTIRMALAR

1. Sayı doğrusu üzerinde uzunluk birimi 1 cm. alındığına göre :

$$0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 7\,,\ 5\,\frac{1}{2}\,,\ 4\,\frac{1}{4}$$

sayılarının görüntü noktalarını işaretleyiniz.

2. Sayı doğrusu üzerinde uzunluk birimi 3 cm. alındığına göre :

a) 0 , 1 , 2 , 3 , 4 sayılarının görüntü noktalarını;

b) $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $1\frac{2}{3}$, $2\frac{1}{2}$, $2\frac{2}{3}$, $3\frac{1}{3}$, $3\frac{2}{3}$, $4\frac{1}{3}$, $4\frac{2}{3}$

sayılarının görüntü noktalarını belirtiniz.

3. Sayı doğrusu üzerinde $|OA| = 5$ cm., $|OB| = 1$ cm., $|OC| = 7$ cm. eşitlikleri ile belli olan A , B , C noktalarını işaretleniyor. $|AB|$, $|BC|$, $|AC|$ uzunluklarını hesap ediniz.

2-2. YÖNLÜ SAYILAR

1. Yönlü Tamsayılar

Ortaokul II - A sınıfındaki öğrenciler bir **oyun kolu** kurmak istiyorlar. Bunun için bir aday listesi hazırlıyorlar. Yapılacak seçimde en çok oy alan öğrencilerden üçü, bu kolu yönetecektir.

Sınıfta bulunan her öğrenciye adayların adları yazılı bir oy kâğıdı veriliyor. Her öğrenci bu oy kâğıdında bulunan adaylardan **kol'a** kesin olarak girmesini istediği adayın adının karşısına **"evet"**, girmesini istemediğinin adının karşısına **"hayır"** sözcüğünü yazıyor. Tanımadığı aday için de hiç bir şey yazmıyor. Bundan sonra katladığı oy kâğıdını bir kutuya atıyor.

Seçim sonunda adaylar için aşağıdaki değerlendirme çizelgesi düzenleniyor.

Adı	Oylar	Bilanço	Sonuç
Metin	E H E E H E H E H	(5 ; 4)	1 E
Can	E E H E E E H E E H E E E	(10 ; 3)	7 E
Selçuk	E H E E H E E H E H H E E E	(9 ; 5)	4 E
Güven	H H E E H H E H H	(3 ; 6)	3 H
Ahmet	E E E E H H H E H H H H H H	(5 ; 8)	3 H
Ayşe	E H E E E E	(5 ; 1)	4 E
Saim	E H H H E H H H E H H	(3 ; 8)	5 H
Selma	E H E E E H E H H H	(5 ; 5)	E = H
Mehmet	H H E H E E E H E E	(6 ; 4)	2 E

Seçimin bilânçosu "3. sütunda" doğalsayı ikilileri ile gösterilmiştir. Bir ikilinin birinci sayısı **"evet'lerin"**, ikinci sayısı da **"hayır'ların"** toplamını gösterir. Son sütunda, seçimin sonucu verilmiştir. Bu sonuç **evet'lerin** toplamıyle **hayır'ların** toplamının farkı ya da **hayır'ların** toplamıyle **evet'lerin** toplamının farkı bulunarak elde edilmiştir. Şimdi elde edilen sonuçları açıklayalım :

A. Denk İkililer

Yukarıdaki çizelgeden hemen görüleceği üzere, Selçuk ile Ayşe'nin seçim sonuçları birbirine eşittir. Her ikisinin de **4 evet'i** vardır. Selçuk'un oy bilançosu (9 ; 5), Ayşe'nin ise (5 ; 1) dir. Bu iki bilanço aynı seçim sonucunu verdiğine göre bunlara, birbirine **denk ikililer** diyeceğiz. Bunun gibi, (7 ; 3) ikilisi (5 ; 1) ikilisine denktir. Birinci ikilide **7 evet, 3 hayır** vardır. İkinci ikilide ise **5 evet, 1 hayır** vardır. Sonuç olarak, birinci ikili için $7 - 3 = 4$ **evet,** ikinci ikili içinde $5 - 1 = 4$ **evet** bulunur. İşte bu bakımdan bu ikililer de birbirine **denk ikililer'dir.**

Yukarıda söz konusu olan 4 **evet** sonucunu veren (9 ; 5), (7 ; 3) ve (5 ; 1) ikilileri ile bunlara denk ikililer için bir çizelge düzenleyelim (**4 E** çizelgesi).

Oylar için düzenlenen çizelgede 3 **hayır** sonucunu veren (3 ; 6) ve (5 ; 8) ikilileri de vardır. Bu ikililer de birbirine denktir. Bunlar ve bunlara denk olan ikililer için bir çizelge düzenlenebilir. (**3 H** çizelgesi). Bunlara benzer olarak seçim sonuçları denk olan ikililer için başka çizelgeler de düzenlenebilir. Bunlardan birkaçı aşağıda verilmiştir :

4 E
(9 ; 5)
(8 ; 4)
(7 ; 3)
(6 ; 2)
(5 ; 1)
(4 ; 0)

3 H
(5 ; 8)
(4 ; 7)
(3 ; 6)
(2 ; 5)
(1 ; 4)
(0 ; 3)

7 E
(10; 3)
(9 ; 2)
(8 ; 1)
(7 ; 0)

3 E
(7 ; 4)
(6 ; 3)
(5 ; 2)
(4 ; 1)
(3 ; 0)

2 E
(5 ; 3)
(4 ; 2)
(3 ; 1)
(2 ; 0)

1 E
(4 ; 3)
(3 ; 2)
(2 ; 1)
(1 ; 0)

5 H
(4 ; 9)
(3 ; 8)
(2 ; 7)
(1 ; 6)
(0 ; 5)

1 H
(4 ; 5)
(3 ; 4)
(2 ; 3)
(1 ; 2)
(0 ; 1)

E = H
(4 ; 4)
(3 ; 3)
(2 ; 2)
(1 ; 1)
(0 ; 0)

Oylar için düzenlenen çizelgede Selma'nın durumu (5 ; 5) ikilisi ile belirtilmiştir. Bu ikili 5 **evet** ve 5 **hayır**'ı gösteriyor. Bir **evet** oyu ile bir **hayır** oyu birbirini yok eder. O halde, burada **evet**'ler ile **hayır**'lar denge durumundadır. (5 ; 5) ikilisi gibi denge durumunda olan kimi ikililer yukarıdaki (**E = H**) çizelgesinde gösterilmiştir.

B. Seçim Sonuçlarının Sıralanması

Oyların sıralama çizelgesine göre **7 E** oyu alan Can bu komitenin ilk üyesi olacaktır. **4 E** oyu alan Selçuk ile Ayşe de komitenin üyeleridirler. Oyunlar komitesinin üç üyeden kurulduğu kabul edilirse, öbür **evet** oylarını alan adaylar seçilmeyeceklerdir.

Yukarıda incelediğimiz örneklerde, doğalsayı ikililerinden birkaç tane **denk ikililer** çizelgesi yaptık.

Bu çizelgelerin her birinde, ikililerin terimleri birer azaltılarak terimlerden birinin sıfıra indirgendiğini görüyorsunuz. Böylece, terimlerinden biri sıfıra indirgenmiş olan en sade ikiliye, bu denk ikililer kümesinin **özel belirticisi** diyoruz. Bir ikilinin özel belirticisini bulmak için, ikilinin büyük teriminden küçüğünü çıkarmak yeter.

Örnekler :

7 E çizelgesindeki denk ikililerin özel belirticisi (7 ; 0)
3 E çizelgesindeki denk ikililerin özel belirticisi (3 ; 0)
5 H çizelgesindeki denk ikililerin özel belirticisi (0 ; 5)
tir.

Bu ikililerin her biri, yeni birer sayı ortaya koyar. Bu sayılara **yönlü tamsayılar** ya da sadece **tamsayılar** diyoruz.

Sorular :

1. (8 ; 3) , (12 ; 7) , ... **denk** ikililerinin oluşturduğu kümenin özel belirticisini bulunuz.

2. (7 ; 11) ikilisine **denk** ikililer kümesinin beş elemanını yazınız ve bunların özel belirticisini gösteriniz.

3. (6 ; 6) ikilisine **denk** ikililer kümesinin 4 elemanını yazınız ve bu kümenin özel belirticisini bulunuz.

C. Tamsayılar Kümesi

Seçim sonuçlarını gösteren çizelgeye göre, üç çeşit ikili elde ettik. Bunları, aşağıdaki şekilde işaretlerle birbirinden ayıracağız :

I. Birinci Terimi, İkinci Teriminden Büyük Olan İkililer

Birbirine **denk** olan (4 ; 3) , (3 ; 2) , (1 ; 0) ikililerinde, birinci terimler ikincilerinden 1 fazladır. Bu ikilileri bir sınıfta toplayalım. Bu ikililerden her birisi bu sınıfın belirticisidir. Bunlar arasında en sade olanı (1 ; 0) ikilisidir. Bu ikili, birinci terimi, ikinci teriminden 1 fazla olan tüm ikililerin oluşturduğu sınıfın indirgenmiş biçimidir. Bunu anlatmak için,

$$(1\ ,\ 0) \longmapsto (+\ 1)$$

yazarız ve "**artı bir**" diye okuruz.

(+ 1) denildiği zaman, birinci terimi, ikinci teriminden 1 fazla olan tüm ikilileri anlarız.

Bunun gibi, birbirine **denk** olan (2 ; 0) , (3 ; 1) , (4 ; 2) , ... ikililerinin en sade olanı (2 ; 0) dır. Bu ikili, kendisine **denk** olan bütün ikililerin oluşturduğu kümenin özel belirticisidir. Bunu da,

$$(2\ ;\ 0) \longmapsto (+\ 2)\ \text{(artı iki)}$$

ile gösteriyoruz. Böylece,

$(3\ ;\ 0) \longmapsto (+\ 3)$ (artı üç) ve $(5\ ;\ 0) \longmapsto (+\ 5)$ (artı beş)

biçiminde göstereceğiz. Özet olarak :

Birinci terimleri ikinci terimlerinden büyük olan doğalsayı ikililerine pozitif tamsayılar denir ve bunların belirttiği küme T+ ile gösterilir.

II. Birinci Terimi İkinci Teriminden Küçük Olan İkililer

Birbirine **denk** (2 ; 3) , (1 ; 2) , (0 ; 1) ikililerinin her birinde ilk terim ikinciden küçüktür. Bu **denk** ikililerin özel belirticisi (0 ; 1) dir. Bunu,

$(0\ ;\ 1) \longmapsto (-1)$ biçiminde gösteririz ve **"eksi 1"**

diye okuruz. Bunun gibi, birbirine **denk** olan (0 ; 2) , (1 ; 3) , (2 ; 4) , ... ikililerinin en sade olanı (0 ; 2) dir. Bu ikili kendisine **denk** olan tüm ikililerin oluşturduğu kümenin özel belirticisidir. Bunu da

$$(0\ ;\ 2) \longmapsto (-2)\ \text{(eksi iki)}$$

ile gösteriyoruz. Özet olarak :

Birinci terimleri ikinci terimlerinden küçük olan doğalsayı ikililerine negatif tamsayılar denir ve bunların belirttiği küme T^- ile gösterilir.

III. Birinci Terimi, İkinci Terimine Eşit Olan İkililer

Birbirine **denk** (3 ; 3) , (2 ; 2) , (1 ; 1) , (0 ; 0) ikililerinde birinci ve ikinci terimler birbirine eşittir. Bunların arasında en sade olan (0 ; 0) ikilisidir. Bu ikili, her iki terimi de birbirine eşit olan denk ikililerin **özel belirticisidir.** Buna, **"sıfır"** diyoruz ve

$$(0\ ;\ 0) \longmapsto 0$$

biçiminde gösteriyoruz. (+ 0) ve (— 0) sayıları, 0 sayılır.

Pozitif ve negatif tamsayıların 0 (sıfır) ile birlikte meydana getirdiği kümeye, tamsayılar kümesi adı verilir ve T ile gösterilir.

$T^+ = \{+1, +2, +3, +4, \ldots\}$ ve $T_0^+ = \{0, +1, +2, +3, \ldots\}$;

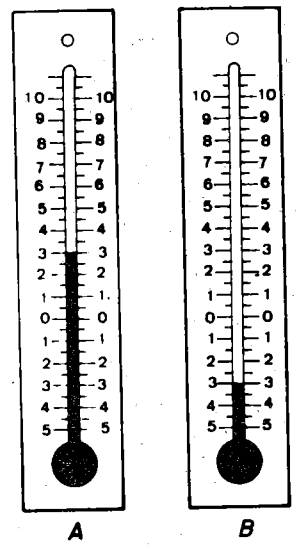
$T^- = \{-1, -2, -3, -4, \ldots\}$ ve $T_0^- = \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$;

$T = \{\ldots -4\ ,\ -3\ ,\ -2\ ,\ -1\ ,\ 0,\ +1\ ,\ +2\ ,\ +3\ ,\ +4\ ,\ \ldots\}$;

$T = T^+ \cup T^- \cup \{0\}$ ya da $T = T_0^+ \cup T_0^-$ dır.

Bir de şöyle düşünelim :

Nicelikleri, her zaman **doğalsayılar** ya da **kesirli sayılar** ile anlatamayız. Aşağıda A ve B termometrelerinden herbiri bir sıcaklığı gösteriyor. Bunların gösterdikleri sıcaklıklar birbirlerine eşit değildir. Termometre sıfırın üstünde 3 dereceyi gösteriyor, başka bir günde termometremizin gösterdiği sıcaklık, sıfırın altında 3 derecedir. "Sıcaklık 3 derecedir" denildiği zaman, bu 3 sayısının gösterdiği sıcaklık hakkında kesin fikrimiz olamaz. Bu konuda kesin olabilmemiz için, **"Sıfırın altında"** ya da **"Sıfırın üstünde"** sözünü eklememiz gerekir.



3. Şekil

"Sıfırın altında 3 derece" sözünü söyleme yerine, "(—3) derece" diyerek de bu 3 sayısının gösterdiği sıcaklığı kesin olarak anlatmış oluruz.

Burada (+) işareti **artı** , (—) işareti de **eksi** diye adlandırılır.

Bu örnek, bize, **doğalsayıların** ve **kesirlerin** dışında başka sayıların da gerekli olduğunu gösteriyor.

ALIŞTIRMALAR

1. Termometre değişik tarihlerde — 5, + 8, — 7, + 22 C derecelerini gösteriyor. Bu sıcaklıkları açıklayınız.

2. Termometre sıfırın üstünde 8, 12, 15, 17 C ve sıfırın altında 6, 14, 9 C derecelerini gösteriyor. Bu sıcaklıkları (+) ve (—) ile nasıl gösteririz?

3. Bir dağın deniz yüzeyinden olan yüksekliği (+) işareti ile gösterilirse, deniz yüzeyinden alçak olan yer (—) işareti ile gösterilir. Buna göre,

a) Ağrı, Uludağ ve Erciyeş dağlarının yüksekliklerini, kabul ettiğimiz bu işaretlerle gösteriniz.

b) Marmara Denizi'nin en derin yeri 1 355 metredir. Deniz, yüzeyine göre bu derinliği gösteriniz.

4. Genel olarak **alacaklar pozitif, borçlar negatif** sayılarla gösterildiğine göre 350 TL alacağı ve 75 TL borcu olan bir adamın durumunu yönlü sayılarla belirtiniz.

5. Bir tüccar 3 700 TL alacaklı ve 1 500 TL borçludur. Tüccarın bu durumunu pozitif ya da negatif sayılarla belirtiniz.

6. Bir iş adamı bir satışta 2 500 TL kâr, ikinci satışta 780 TL zarar ediyor. **Kâr pozitif** ve **zarar negatif** sayılarla gösterildiğine göre tüccarın bu durumunu belirtiniz.

7. İsa'nın doğumundan **sonraki yıllar pozitif, önceki yıllar negatif** sayılarla anlatılır. Buna göre aşağıdaki olayları yönlü sayılarla gösteriniz :

a) Atatürk İsa'dan 1881 yıl sonra doğmuştur.

b) Türkiye'de Cumhuriyet 1923 yılında ilân edilmiştir.

c) Pisagor (Pythagoras) İsa'dan 596 yıl önce doğmuştur.

d) Öklid (Eukleides) İsa'dan 330 yıl önce doğmuştur.

8 Ekvatorun kuzeyindeki yerlerin enlemleri pozitif sayılarla gösterilirse, güneyindeki yerlerin enlemleri negatif sayılarla anlatılır. Bu uylaşıma göre, aşağıdaki yerlerin enlemlerini yönlü sayılarla gösteriniz :

a) Ankara 40° 53′03″ kuzeydedir.

b) Sinop ili içindeki İnce Burun 42° 49′56″ kuzeydedir.

2. Yönlü Rasyonel Sayılar

Termometrenin sıfırın üstünde $5\frac{1}{2}$ sıcaklık derecesini gösterdiğini düşünelim. Sıfırın üstündeki tamsayılarla gösterilen sıcaklık derecelerinde olduğu gibi, bu sıcaklığı da $5\frac{1}{2}$ rasyonel sayısının soluna (+) işareti koyarak göstereceğiz. Böylece $\left(+ 5° \frac{1}{2}\right)$ yazacağız. $5\frac{1}{2} = \frac{11}{2}$ olduğundan bu sıcaklık derecesi $\left(+\frac{11}{2}\right)$ yönlü rasyonel sayısı ile gösterilmiş olur.

Termometre sıfırın altında $4\frac{1}{2}$ sıcaklık derecesini göstermiş olsaydı, bunu $\left(-4°\frac{1}{2}\right)$ ile anlatırdık. $4\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$ olduğundan, bu sıcaklık derecesi $\left(-\frac{9}{2}\right)$ yönlü rasyonel sayısı ile gösterilir.

Doğalsayıların,

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \ldots$$

biçiminde rasyonel sayı olarak gösterilebileceğini biliyoruz. Bu sayılara (+) ya da (—) işaretlerini bağlayarak, yönlü tamsayıları da,

$$\left(+\frac{1}{1}\right), \left(+\frac{2}{1}\right), \left(+\frac{3}{1}\right), \left(+\frac{4}{1}\right) \text{ ya da}$$

$$\left(-\frac{1}{1}\right), \left(-\frac{2}{1}\right), \left(-\frac{3}{1}\right), \ldots$$

yönlü rasyonel sayı biçiminde gösterebiliriz. Şu halde yönlü tamsayılar kümesi, yönlü rasyonel sayılar kümesinin bir küme parçası olur.

Rasyonel sayılar kümesi R, tamsayılar kümesi T olduğuna göre,

$$T \subset R \text{ yazılır.}$$

Uyarma :

Bundan böyle, "**Bir rasyonel sayı**" denildiği zaman, "**yönlü rasyonel sayı**" anlaşılacaktır. Bu da, (**a**) herhangi bir tamsayı, (**b**), sıfır olmayan bir tamsayı olmak üzere, $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ biçiminde yazılan bir sayı demektir.

Uyaşımlar :

$+$ işareti, bir doğalsayının soluna yazılırsa, **pozitif bir tamsayı**; bir rasyonel sayının soluna yazılırsa, **pozitif bir rasyonel sayı** elde edilir.

$-$ işareti, bir doğal sayının soluna yazılırsa **negatif bir tamsayı**; bir rasyonel sayının soluna yazılırsa **negatif bir rasyonel sayı** bulunur.

$(+0)$ ya da (-0) yerine sadece 0 yazılır.

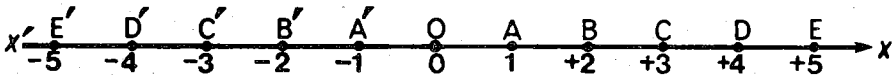
Yönlü bir sayının işareti kaldırıldığı zaman elde edilen sayı, bu yönlü sayının **salt değeridir.** Buna göre, (-5) ve $(+5)$'in salt değeri 5 'tir. Bunu, şöyle gösteririz :

$$|+5| = 5 \quad ; \quad |-5| = 5.$$

3. Sayı Doğrusu ve Rasyonel Sayılar

Örnekler :

1. Bir x'x doğrusu üzerinde değişmeyen O noktası ile bu noktanın sağında ve solunda eşit bölmeler alalım. O noktasının sağındaki bölmeleri oluşturan noktalar **pozitif tamsayılarla,** O noktasının solundaki bölmeleri meydana getiren noktalar da **negatif tamsayılarla** eşleşirler (4. Şekil).



4. Şekil

Bu sayı doğrusu üzerindeki A noktasının O noktasına olan uzaklığı, [OA] doğru parçasının uzunluğudur. Bu uzunluk $|OA| = 1$ **birim** ile gösterilir. Bunun gibi A' noktasının O noktasına olan uzaklığı da $|OA'| = 1$ **birim**'dir. A ve A' noktaları sayı doğrusu üzerinde ayrı yerlerde bulundukları halde, O noktasına olan uzaklıkları **1 sayısı** ile gösterilmiştir. Bu noktaların sayı doğrusu üzerindeki yerlerini belirtmek için **yönlü tamsayılardan** yararlanıyoruz. A ve A' noktaları $(+1)$ ve (-1) sayıları ile eşleşiyorlar. Başka bir deyişle, [OA] doğru parçasının A ucu, $(+1)$ yönlü sayısına karşılık olduğundan, bu durumu belirtmek için $\overline{OA} = +1$ yazılır. Bu A noktası $A(+1)$ şeklinde gösterilir ve

"A , artı bir"

diye okunur. Bu gösterme biçiminden, A noktasının, O başlangıç noktasının sağında ve O 'ya uzaklığının **1 birim** olduğunu anlarız.

A' noktası ise, O başlangıç noktasının solunda olup (-1) sayısına karşılıktır. Bu durumu belirtmek için $\overline{OA'} = -1$ yazılır. Bu da $A'(-1)$ biçiminde gösterilir. Öbür noktalar da :

$$D(+4)\ ,\ C'(-3)\ ,\ D'(-4)\ ,\ \ldots$$

şeklinde gösterilir. Bu gösterme biçimlerinin her birinde, doğru parçalarının uç noktalarının O **başlangıç noktasına** göre durumları kesin olarak bellidir.

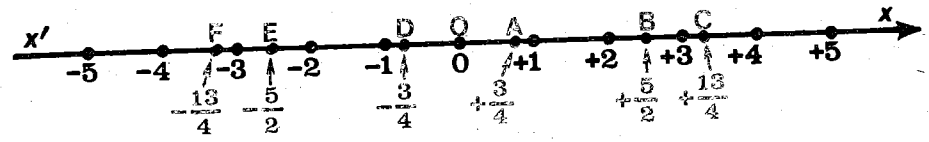
2. x'Ox sayı doğrusu üzerinde seçilen bir **uzunluk birimine** göre O başlangıç noktasının sağında, uzunlukları :

$$|OA| = \frac{3}{4} \text{ birim} \quad |OB| = \frac{5}{2} \text{ birim}, \quad |OC| = \frac{13}{4} \text{ birim}$$

olan doğru parçaları alınıyor. O başlangıç noktasının solunda da, uzunlukları :

$$|OD| = \frac{3}{4} \text{ birim}, \quad |OE| = \frac{5}{2} \text{ birim}, \quad |OF| = \frac{13}{4} \text{ birim}$$

olan doğru parçaları alınıyor (5. şekil).



5. Şekil

A , B , C noktaları sıra ile

$$\left(+\frac{3}{4}\right), \left(+\frac{5}{2}\right), \left(+\frac{13}{4}\right)$$

yönlü rasyonel sayılarının **görüntüleridir.**

D , E , F noktaları da sıra ile

$$\left(-\frac{3}{4}\right), \left(-\frac{5}{2}\right), \left(-\frac{13}{4}\right)$$

yönlü rasyonel sayılarının **görüntüleri** olur.

Bu yöntemle, her yönlü rasyonel sayıya karşılık, sayı doğrusu üzerinde bir noktanın bulunabileceği anlaşılır.

Sayı doğrusu üzerinde B ve E noktalarının O başlangıç noktasına uzaklıkları $\frac{5}{2}$ **birimdir.** Bu noktaların O başlangıç noktasına göre yerlerini kesin olarak belirtmek için $\frac{5}{2}$ sayısına $(+)$ ya da $(-)$ işaretlerinden birini bağlamak zorundayız.

B noktası, O nun sağında bulunduğu için $\left(+\frac{5}{2}\right)$ yönlü rasyonel sayısına karşılıktır. E noktası ise, O nun solunda bulunduğu için $\left(-\frac{5}{2}\right)$ yönlü rasyonel sayısına karşılıktır. [OB] doğru parçasının B bitim noktası $\left(+\frac{5}{2}\right)$ sayısına karşılık olduğundan, bu durumu belirtmek için $\overline{OB} = +\frac{5}{2}$ yazılır. B noktasını

$$B\left(+\frac{5}{2}\right)$$

şeklinde gösterebiliriz. Bunun gibi, E noktasını da

$$E\left(-\frac{5}{2}\right)$$

biçiminde gösteririz.

A, C, D, F noktalarını da benzer biçimde gösteriniz.

Bundan sonra, **tamsayı** dediğimiz zaman yönlü tamsayıyı, **rasyonel sayı** dediğimizde de yönlü rasyonel sayıyı anlayacağız.

Uyarma :

İşareti yazılmayan bir tamsayı ya da bir rasyonel sayı, **pozitif** olarak düşünülür.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki tamsayıların görüntülerini sayı doğrusu üzerinde gösteriniz :

$$(-7)\ ,\ (+10)\ ,\ (-5)\ ,\ (-11)\ ,\ (+9)$$

2. Sayı doğrusu üzerinde O başlangıç noktasının sağında, olmak üzerinde A, B, C noktaları alınıyor; O noktasının solunda da :

$$|OK| = 4 \text{ cm.},\ |OL| = 6 \text{ cm.},\ |OM| = 7 \text{ cm.}$$

olacak şekilde K, L, M noktaları işaretleniyor.

Uzunluk birimi 1 cm. alındığına göre, A , B , C ve K , L , M noktalarına karşılık olan **yönlü tamsayıları** bulunuz.

3. Sayı doğrusu üzerinde aşağıdaki rasyonel sayıların görüntülerini işaretleyiniz. Uzunluk birimini 2 cm. alınız.

$$(+1),\ (-1),\ \left(-\frac{5}{2}\right),\ \left(-3\frac{1}{4}\right),\ \left(-2\frac{1}{2}\right),\ \left(+3\frac{1}{2}\right),\ \left(+4\frac{1}{4}\right)$$

4. A $(+3)$ ve B (-7) olduğuna göre, sayı doğrusu üzerinde A ve B noktalarını işaretleyiniz ve sonra birimleri sayarak |AB| uzunluğunu hesaplayınız. (Birim 1 cm. alınacak.)

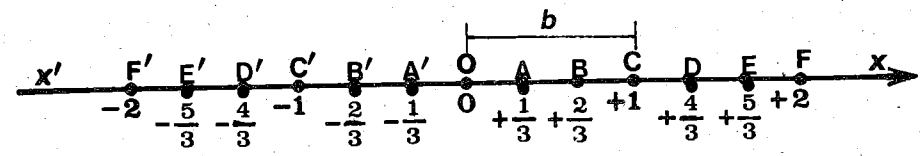
5. $A\left(-\frac{4}{3}\right),\ B\left(+\frac{3}{2}\right),\ C\left(-\frac{7}{4}\right)$

olduğuna göre, sayı doğru üzerinde A , B , C noktalarının yerlerini bulunuz (Uzunluk birimi 1,5 cm. alınacaktır.)

4. Rasyonel Sayılar Kümesinde Sıralama

x'Ox sayı doğrusu üzerinde uzunluk birimi olarak 3 cm. seçiliyor. Bu birimi b ile gösterelim. Bu birime göre :

O başlangıç noktasının sağında



6. Şekil

$$|OA| = \frac{1}{3}b\ ,\ |OB| = \frac{2}{3}b\ ,\ |OC| = b\ ,\ |OD| = \frac{4}{3}b\ ,$$

$$|OE| = \frac{5}{3}b,\ |OF| = 2b$$

uzunlukları ile, O başlangıç noktasının solunda

$$|OA'| = \frac{1}{3}b,\quad |OB'| = \frac{2}{3}b,\quad |OC'| = b,$$

$$|OD'| = \frac{4}{3}\,b,\quad |OE'| = \frac{5}{3}\,b,\quad |OF'| = 2\,b$$

uzunlukları alınıyor (6. şekil).

Burada A , B , C , D , E , F noktalarına karşılık olan rasyonel sayılar, sıra ile

$$+\frac{1}{3}\,,\ +\frac{2}{3}\,,\ +\frac{3}{3} = +1\,,\ +\frac{4}{3}\,,\ +\frac{5}{3}\,,\ +\frac{6}{3} = +2$$

dir.

A′ , B′ , C′ , D′ , E′ , F′ noktalarına karşılık olan rasyonel sayılar da, sıra ile

$$-\frac{1}{3}\,,\ -\frac{2}{3}\,,\ -\frac{3}{3} = (-1)\,,\ -\frac{4}{3}\,,\ -\frac{5}{3}\,,\ -\frac{6}{3} = (-2)$$

olur.

Sayı doğrusu üzerinde, O başlangıç noktasının sağında bulunan her rasyonel sayı, bir önceki rasyonel sayıdan daha büyüktür.

$$0 < \frac{1}{3} < \frac{2}{3} < 1 < \frac{4}{3} < \frac{5}{3} < 2 < \dots$$

dir.

Sayı doğrusu üzerinde O 'nun solundaki rasyonel sayılar için :

$$\dots < (-2) < \left(-\frac{5}{3}\right) < \left(-\frac{4}{3}\right) < (-1) < \left(-\frac{2}{3}\right) < \left(-\frac{1}{3}\right) < 0$$

dır. Genel olarak :

Sayı doğrusu üzerinde belirtilen her rasyonel sayı, solundaki rasyonel sayılardan büyük ve sağındaki rasyonel sayılardan küçüktür.

ALIŞTIRMALAR

A Grubu :

1. Aşağıda ... ile gösterilen yerlere $\in$ ya da $\notin$ işaretlerinden uygun olanı yazınız :

a) $(-3) \dots T$; **b)** $(-4) \dots T^+$; **c)** $(+5) \dots T^-$;
d) $0 \dots T^+$; **e)** $(+6) \dots T_0^+$.

2. T , T^- , T^+ , T_0^- , T_0^+ kümelerini elemanlarıyle belirtiniz.

3. Aşağıdaki sayılar, T , T^- , T^+ , T_0^+ , T_0^- kümelerinden hangilerinin elemanı olurlar?

a) $+6$; **b)** -5 ; **c)** 0 ; **d)** -1 ; **e)** -1 ; **f)** $+7$.

Yol gösterme :

a) $+6 \in T$, $+6 \in T^+$, $+6 \in T_0^+$
dir. Öbürlerinin de bunun gibi yapınız.

4. Aşağıdaki birleşim ve kesişim kümelerini yazınız :

a) $T^- \cup T^+ = ?$ **c)** $T_0^- \cup T_0^+$
b) $T^- \cap T^+ = ?$ **d)** $T_0^- \cap T_0^+$

Yol gösterme :

a) $T^- \cup T^+ = T - \{0\}$.

5. Aşağıdaki yönlü sayıların salt değerlerini yazınız :

a) $|+9| =$ **b)** $|-8| =$ **c)** $|-25| =$
$|-6| =$ $|+6| =$ $|-18| =$
$|0| =$ $|-1| =$ $|+15| =$

6. Aşağıda ... ile gösterilen yerlere $<$, $>$ ya da $=$ işaretlerinden uygun olanını yazınız :

a) $|-5| \dots |+3|$; **b)** $|+5| \dots |-6|$; **c)** $|0| \dots |-5|$;
d) $|-3| \dots |+3|$; **e)** $|-7| \dots |-10|$; **f)** $|-4| \dots |-8|$;
g) $|-3| \dots |-7|$; **h)** $|+8| \dots |-8|$.

7. Aşağıdaki kümelerin elemanlarını büyüklük sırasına göre, küçükten büyüğe doğru yazınız.

a) $\{+3, -5, +4, -7, 0\}$; **b)** $\{-2, +3, -4, -8, +5\}$.

8. Aşağıdaki kümelerin elemanlarını büyükten küçüğe doğru yazınız.

a) $\{+3, -5, 0, -10, +1\}$; **b)** $\{+5, -8, 0, +11, -6, +8\}$.

9. Aşağıda ... ile gösterilen yerlere $<$, $>$ ya da $=$ işaretlerinden uygun olanını yazınız :

a) $-4 \dots +3$; **b)** $+3 \dots -3$; **c)** $+5 \dots -3$;
$-3 \dots -5$; $-8 \dots -8$; $-5 \dots 0$;
$+2 \dots -6$; $-8 \dots -5$; $+4 \dots 0$.

10. Aşağıdaki bağıntılara uyan s tamsayılarının oluşturduğu kümeleri elemanlarıyle belirtiniz :

a) $-4 \leqslant s < +3$; **b)** $-6 < s < -2$;

c) $-8 < s \leqslant 0$; **d)** $-2 \leqslant s \leqslant +6$.

2-3. RASYONEL SAYILARLA TOPLAMA İŞLEMİ

1. İki Tamsayının Toplamı

Ortaokul II-A sınıfındaki öğrencilerin oyun koluna seçecekleri adaylara II-B'deki öğrenciler de oy vermeyi kabul ediyorlar. İki kısımdaki oylama sonunda elde edilen sonuçlar, önce **evet**, sonra **hayır** sayısı yazılarak aşağıdaki çizelge düzenlenmiştir :

Adaylar	II - A sınıfı		II - B sınıfı		İki kısmın toplamı	
	E ve H sayısı	Sonuç	E ve H sayısı	Sonuç	E ve H sayısı	Sonuç
Metin	(5 ; 4)	1 E	(7 ; 1)	6 E	(12 ; 5)	7 E
Güven	(3 ; 6)	3 H	(8 ; 5)	3 E	(11 ; 11)	—
Can	(10 ; 3)	7 E	(4 ; 2)	2 E	(14 ; 5)	9 E
Selçuk	(9 ; 5)	4 E	(7 ; 8)	1 H	(16 ; 13)	3 E
Ahmet	(5 ; 8)	3 H	(3 ; 4)	1 H	(8 ; 12)	4 H
Ayşe	(5 ; 1)	4 E	(4 ; 7)	3 H	(9 ; 8)	1 E
Saim	(3 ; 8)	5 H	(5 ; 3)	2 E	(8 ; 11)	3 H
Selim	(5 ; 5)	—	(8 ; 4)	4 E	(13 ; 9)	4 E
Mehmet	(6 ; 4)	2 E	(2 ; 4)	2 H	(8 ; 8)	—

Yukarıdaki çizelgeyi inceleyiniz. Her ikiliyi meydana getiren sayılar birer doğalsayıdır. Doğalsayılar kümesi toplama işlemine göre kapalı olduğundan, iki ikilinin toplamı da yine bir doğalsayı ikilisi ile gösterilebilir.

Örnekler :

1. Her iki sınıftan Metin'in aldığı oyların toplamı :

$$(5 ; 4) + (7 ; 1) = (12 ; 5)$$

olur.

$(5 ; 4)$ İkilisinin indirgenmiş biçimi $(1 ; 0)$,

$(7 ; 1)$ İkilisinin indirgenmiş biçimi $(6 ; 0)$,

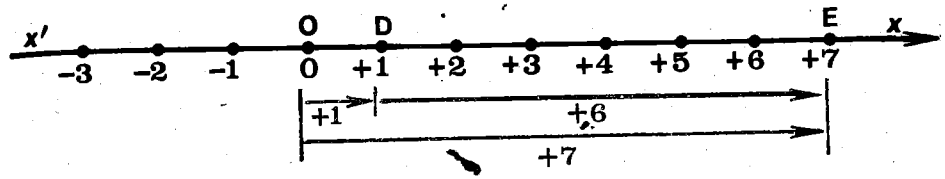
$(12; 5)$ İkilisinin indirgenmiş biçimi $(7 ; 0)$ dır.

$(1 ; 0) \longmapsto +1$, $(6 ; 0) \longmapsto +6$ ve $(7 ; 0) \longmapsto +7$

olduğundan

$$(+1) + (+6) = (+7)$$

dir.



7. Şekil

Bu toplama işleminin sayı doğrusu üzerinde nasıl yapıldığı "7. şekilde" görülüyor.

2. Her iki sınıftan Ayşe'nin aldığı oyların toplamı :

$$(5 ; 1) + (4 ; 7) = (9 ; 8)$$

olur. Oysa,

$$(5 ; 1) \equiv (4 ; 0) \longmapsto (+4) \ , \ (4 ; 7) \equiv (0 ; 3) \longmapsto (-3)$$

ve

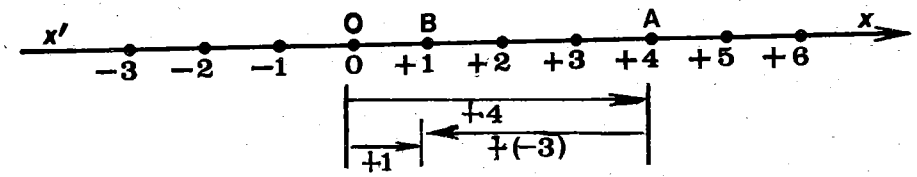
$$(9 ; 8) \equiv (1 ; 0) \longmapsto (+1)$$

dir. Öyleyse :

$$(+4) + (-3) = (+1)$$

olur.

Bu toplama işleminin sayı doğrusu üzerinde nasıl yapıldığı "8. şekilde" görülüyor.



8. Şekil

3. Her iki sınıftan Ahmet'in aldığı oyların toplamı :

$$(5\ ;\ 8) + (3\ ;\ 4) = (8\ ;\ 12)$$

olur. Oysa,

$$(5\ ;\ 8) \equiv (0\ ;\ 3) \longmapsto (-3)\ ,\quad (3\ ;\ 4) \equiv (0\ ;\ 1) \longmapsto (-1)$$

ve

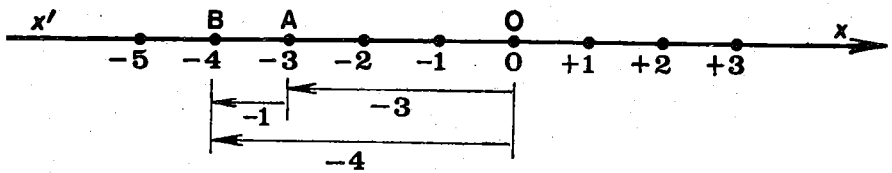
$$(8\ ;\ 12) \equiv (0\ ;\ 4) \longmapsto (-4)$$

tür. Öyleyse :

$$(-3) + (-1) = (-4)$$

olur.

Bu toplama işleminin sayı doğrusu üzerinde nasıl yapıldığını da "9. şekilde" görüyorsunuz.



9. Şekil

4. Her iki sınıftan Saim'in aldığı oyların toplamı :

$$(3\ ;\ 8) + (5\ ;\ 3) = (8\ ;\ 11)$$

olur. Oysa

$$(3\ ;\ 8) \equiv (0\ ;\ 5) \longmapsto (-5)\ ,\quad (5\ ;\ 3) \equiv (2\ ;\ 0) \longmapsto (+2)$$

ve

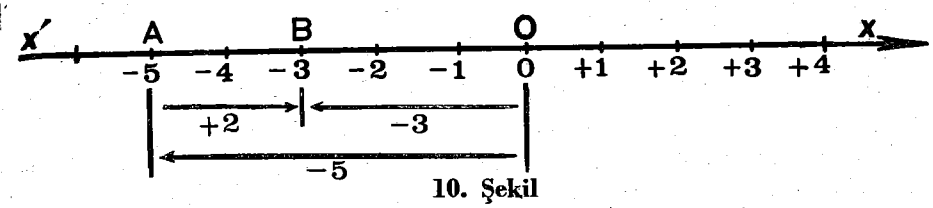
$$(8\ ;\ 11) \equiv (0\ ;\ 3) \longmapsto (-3)$$

tür. Öyleyse :

$$(-5) + (+2) = (-3)$$

olur.

Bu toplama işleminin, sayı doğrusu üzerinde nasıl yapıldığı da "10. şekilde" görülmektedir.



10. Şekil

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki çizelgeyi defterinize çiziniz. Boş gözlere hangi sayıları yazmalısınız?

(+5)	(−2)	İkili Olarak Toplam	Tamsayı Olarak Toplam
(8 ; 3)	(3 ; 5)	(11 ; 8)	(+3)
(6 ; 1)	(7 ; 9)	(13 ; 10)	
(5 ; 0)	(1 ; 3)	(;)	
(12 ; 7)	(0 ; 2)		
(7 ; 2)	(6 ; 8)		
(10 ; 5)	(10 ; 12)		

2. Aşağıdaki toplamaları yapınız ve her birini sözle anlatınız :

a) $(+7) + (+5) = ?$; **b)** $(-7) + (-5) = ?$

c) $(+7) + (-5) = ?$; **d)** $(-7) + (+5) = ?$

3. Aşağıdaki çizelgeyi defterinize çiziniz. Toplama işlemi yaparak boş gözleri doldurunuz.

+	(−5)	(−4)	(−3)	(−2)	(−1)	0	(+1)	(+2)	(+3)	(+4)	(+5)
(+5)											
(+4)			(+1)								
(+3)					(+2)						
(+2)									(+5)		
(+1)						(+1)					
0				(−2)	(−1)	0	(+1)			(+4)	
(−1)						(−1)					
(−2)					(−3)				(+1)		
(−3)		(−7)						(−1)			
(−4)						(−4)					
(−5)											

2. İki Rasyonel Sayının Toplamı

Örnekler :

1. a) $\left(+\frac{3}{5}\right)+\left(+\frac{1}{5}\right)=\left(+\frac{4}{5}\right)$; b) $\left(-\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{1}{5}\right)=\left(-\frac{4}{5}\right)$;

c) $\left(+\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{1}{5}\right)=\left(+\frac{2}{5}\right)$; d) $\left(-\frac{3}{5}\right)+\left(+\frac{1}{5}\right)=\left(-\frac{2}{5}\right)$

olur.

2. a) $\left(+\frac{3}{4}\right)+\left(+\frac{1}{6}\right)=\left(+\frac{9}{12}\right)+\left(+\frac{2}{12}\right)=\left(+\frac{11}{12}\right)$;

b) $\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{1}{6}\right)=\left(-\frac{9}{12}\right)+\left(-\frac{2}{12}\right)=\left(-\frac{11}{12}\right)$;

c) $\left(+\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{1}{6}\right)=\left(+\frac{9}{12}\right)+\left(-\frac{2}{12}\right)=\left(+\frac{7}{12}\right)$;

d) $\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(+\frac{1}{6}\right)=\left(-\frac{9}{12}\right)+\left(+\frac{2}{12}\right)=\left(-\frac{7}{12}\right)$

bulunur. (Paydaları eşit olmayan iki rasyonel sayının toplanmasında, önce paydaların eşitleneceğini unutmayınız.)

Sorular :

1. $\left(+\frac{3}{7}\right)+\left(+\frac{2}{7}\right) = ?$
2. $\left(-\frac{7}{12}\right)+\left(-\frac{9}{5}\right) = ?$
3. $\left(+\frac{5}{6}\right)+\left(+\frac{3}{8}\right) = ?$
4. $\left(-\frac{7}{15}\right)+\left(+\frac{12}{25}\right) = ?$
5. $\left(+\frac{11}{12}\right)+\left(-\frac{5}{9}\right) = ?$
6. $\left(-7\frac{2}{3}\right)+\left(+3\frac{1}{2}\right) = ?$
7. $\left(+5\frac{1}{2}\right)+\left(+3\frac{1}{2}\right) = ?$
8. $\left(-5\frac{1}{2}\right)+\left(-9\frac{1}{4}\right) = ?$
9. $\left(+6\frac{3}{4}\right)+\left(-5\frac{1}{2}\right) = ?$
10. $\left(+2\frac{5}{6}\right)+\left(-8\frac{5}{24}\right) = ?$

3. Rasyonel Sayılar Kümesinde Toplama İşleminin Özelikleri

a) Kapalılık Özeliği

Örnekler :

1. $(+7)$ ve (-4) tamsayıları verilmiş olsun. Bu tamsayıları belirten ikililer :

$$(7\ ;\ 0) \text{ ve } (0\ ;\ 4)$$

dür. Bu sayıların toplamı;

$$(7\ ;\ 0) + (0\ ;\ 4) = (7 + 0\ ;\ 0 + 4) = (7\ ;\ 4)$$

olur.

Doğalsayılar kümesi, toplama işlemine göre kapalı olduğundan, iki doğalsayı ikilisinin toplamı ile yine bir doğalsayı ikilisi elde edilir. Burada

$$(7\ ;\ 4) \equiv (3\ ;\ 0) \longmapsto (+3) \in T$$

dir. Öyleyse :

İki tamsayının toplamı yine bir tamsayıdır.

2. $+\frac{3}{5}$ ve $-\frac{2}{3}$ yönlü rasyonel sayıları verilmiş olsun. Bu sayıların toplamı :

$\left(+\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)=\left(+\frac{9}{15}\right)+\left(-\frac{10}{15}\right)=\left(-\frac{1}{15}\right) \in R$ olur.

Bu iki örnekte, iki rasyonel sayının toplamının yeni bir rasyonel sayısı olduğu görülür. Bu özelik, sözle şöyle anlatılır :

Rasyonel sayılar kümesi toplama işlemine göre kapalıdır.

b) Değişme Özeliği

Örnekler :

1. (-20) ve $(+8)$ sayılarının toplamı :

$$(-20) + (+8) = (-12)$$

dir.

Şimdi de $(+8)$ ile (-20)'nin toplamını bulalım :

$$(+8) + (-20) = (-12)$$

olur. Öyleyse :

$$(-20) + (+8) = (+8) + (-20)$$

yazılır.

2. $\left(+\frac{3}{4}\right)$ ve $\left(-\frac{1}{2}\right)$ sayılarının toplamı :

$$\left(+\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(+\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{2}{4}\right)=\left(+\frac{1}{4}\right) \quad \text{olur.}$$

Bu kez de $\left(-\frac{1}{2}\right)$ ile $\left(+\frac{3}{4}\right)$'ü toplayalım :

$$\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(+\frac{3}{4}\right)=\left(-\frac{2}{4}\right)+\left(+\frac{3}{4}\right)=\left(+\frac{1}{4}\right)$$

bulunur. Öyleyse :

$$\left(+\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(+\frac{3}{4}\right)$$

yazılır.

Bu iki örnekten anlaşılıyor ki :

Rasyonel sayılar kümesinde toplama işleminin değişme özeliği vardır.

c) Birleşme Özeliği

Örnekler :

1. (-7) , $(+4)$, $(+5)$ tamsayıları verilmiş olsun. Bu sayıların toplamını bulalım :

Önce, bu toplama işlemini şöyle yapalım :

$$[\underbrace{(-7) + (+4)}] + (+5) = ?$$

$$(-3) \quad + (+5) = (+2) \quad \text{dir.}$$

Şimdi de bu toplama işlemini aşağıdaki biçimde yapalım :

$$(-7) + [\underbrace{(+4) + (+5)}] = ?$$

$$(-7) + \quad (+9) \quad = (+2) \quad \text{bulunur.}$$

Görülüyor ki, verilen toplama işleminin iki yoldan da bulunan sonuçları birbirine eşittir. Buna göre,

$$[(-7) + (+4)] + (+5) = (-7) + [(+4) + (+5)]$$

yazılır.

2. $\left(+\frac{3}{4}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\left(+\frac{5}{8}\right)$ rasyonel sayıları verilmiş olsun.

Bu sayıların toplamasını aşağıdaki biçimlerde yapalım :

$$\left[\left(+\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\right]+\left(+\frac{5}{8}\right) = \left[\underbrace{\left(+\frac{6}{8}\right)+\left(-\frac{4}{8}\right)}\right]+\left(+\frac{5}{8}\right)= ?$$

$$= \underbrace{\left(+\frac{2}{8}\right) \quad +\left(+\frac{5}{8}\right)}_{\left(+\frac{7}{8}\right)} = ? \quad \text{olur.}$$

$$\left(+\frac{3}{4}\right)+\left[\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(+\frac{5}{8}\right)\right] = \left(+\frac{6}{8}\right)+\left[\underbrace{\left(-\frac{4}{8}\right)+\left(+\frac{5}{8}\right)}\right]= ?$$

$$= \underbrace{\left(+\frac{6}{8}\right)+ \quad \left(+\frac{1}{8}\right)}_{\left(+\frac{7}{8}\right)} \quad = ?$$

bulunur. Öyleyse :

$$\left[\left(+\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\right]+\left(+\frac{5}{8}\right)=\left(+\frac{3}{4}\right)+\left[\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(+\frac{5}{8}\right)\right]$$

yazılır.

İncelediğimiz bu iki örnekten anlaşılıyor ki :

Rasyonel sayılar kümesinde toplama işleminin birleşme özeliği vardır.

Bu özelik, ikiden çok sayının toplamını bulmaya yarar.

Örnek :

$$(+8) + (-3) + (-12) + (+5) = ?$$

Birleşme ve diğişme özeliklerine göre, bu toplama şöyle yazılabilir :

$$[\underbrace{(+8) + (+5)}_{(+13)}] + [\underbrace{(-3) + (-12)}_{(-15)}] = ?$$

$$(+13) + (-15) = (-2)$$

bulunur.

d) Etkisiz Eleman

0 sayısı ve toplama işlemi :

Örnekler :

1. $(-3) + 0 = 0 + (-3) = (-3)$;

2. $\left(-\frac{8}{5}\right) + 0 = 0 + \left(-\frac{8}{5}\right) = \left(-\frac{8}{5}\right)$

tir.

Görülüyor ki, rasyonel sayıların toplamasında 0 (sıfır) sayısı sonuca etki yapmıyor. Şu halde :

Rasyonel sayılar kümesinde 0 sayısı toplama işlemine göre etkisiz elemandır.

Not :

Ortaokulun birinci sınıfında doğalsayılar kümesinin toplama işlemine göre kapalı olduğunu, bu kümede tanımlanan toplama işleminin **değişme, birleşme** özeliklerinin bulunduğunu ve 0 (sıfır) sayısının bu işleme göre **etkisiz eleman** olduğunu görmüştünüz.

Burada da rasyonel sayılar kümesinde tanımlanan toplama işlemine göre kümenin **kapalı** olduğunu, bu işlemin **değişme, birleşme** özeliklerinin bulunduğunu ve 0 (sıfır) sayısının yine bu işleme göre **etkisiz eleman** olduğunu gördük.

e) Toplamaya Göre Ters Elemanlar

Örnekler :

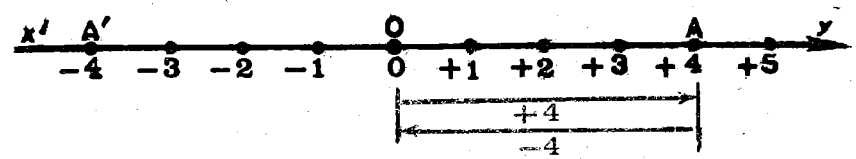
1. $(+4)$ ve (-4) sayıları, toplamaya göre birbirinin tersi olan iki sayıdır. Bu iki sayının toplamı 0 (sıfır) dır.

Gerçekten, $(+4)$ sayısı, sayı doğrusu üzerinde O noktasından sağa doğru "4 birim uzunluk" kadar ilerleyerek A noktasına geldiğimizi gösterir. Bu sayıya (-4) sayısını katmak demek, A noktasından başlayıp geriye doğru (sola doğru) "4 birim uzunluk" kadar yürüyerek O noktasına dönmek demektir. Bu nedenle,

$$(+4) + (-4) = 0$$

dır. (11. şekil).

Siz de bu toplamı **borç** ve **alacak** yönünden düşünerek açıklayınız. Bu toplamayı şöyle de açıklayabiliriz :



11. şekil

$(+4)$ ve (-4) tamsayılarını belirten ikililer :

$$(4\ ;\ 0) \quad \text{ve} \quad (0\ ;\ 4)$$

olduğundan,

$(+4) + (-4)$ toplamı :

$$(4\ ;\ 0) + (0\ ;\ 4) = (4 + 0\ ;\ 0 + 4)$$

$$(4\ ;4) \equiv (0\ ;\ 0) \longmapsto 0$$

elde edilir.

2. $(+7) + (-7) = 0$

olduğunu yukarıdaki açıklamalardan yararlanarak gösteriniz.

3. $\left(+\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right) = 0$

olduğunu görmek için, sayı doğrusu üzerinde O noktasından başlayarak sağa doğru "$\frac{3}{2}$ **birim uzunluk**" ilerleyiniz; sonra vardığınız noktadan

geriye doğru "$\frac{3}{2}$ **birim uzunluk**" kadar yürüyünüz.

İşte böyle, rasyonel sayılar kümesinde toplamı 0 (sıfır) olan iki elemana, toplamaya göre **ters elemanlar** adı verilir.

Rasyonel sayılar kümesinde, toplama işlemine göre bir elemanın tersi olan bir ve yalnız bir eleman vardır.

Bir sayının toplama işlemine göre tersini bulmak için o sayının işaretini değiştirmek yeter. Sözgelimi,

(-5) sayısının toplamaya göre tersi $(+5)$;

$\left(+\frac{2}{3}\right)$ sayısının toplamaya göre tersi $\left(-\frac{2}{3}\right)$ olur.

4. İkiden Çok Rasyonel Sayının Toplaması

Örnekler :

1. $(+8) + (-3) + (+4) + (-12) + (-7) = ?$

Bu toplama işlemi şöyle yapılır :

$$\underbrace{(+8) + (-3)} + (+4) + (-12) + (-7) = ?$$

$$\underbrace{(+5) + (+4)} + (-12) + (-7) = ?$$

$$\underbrace{(+9) + (-12)} + (-7) = ?$$

$$(-3) + (-7) = (-10)$$

Siz de bu işlemi, birleşme ve değişme özeliklerinden yararlanarak, pozitif sayıları bir arada, negatif sayıları da bir arada toplayınız. Sonra bulduğunuz sonuçları toplayınız. (-10) sayısını bulacaksınız.

2. $T = \left(+\frac{5}{2}\right) + (-4) + \left(+\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{5}{6}\right) + \left(+\frac{7}{3}\right) = ?$

Toplama işleminin değişme ve birleşme özeliklerine göre,

$$T = \left(+\frac{5}{2}\right) + \left(+\frac{3}{4}\right) + \left(+\frac{7}{3}\right) + (-4) + \left(-\frac{5}{6}\right)$$

$$T = \underbrace{\left(+\frac{30}{12}\right) + \left(+\frac{9}{12}\right)} + \left(+\frac{28}{12}\right) + \underbrace{\left(-\frac{48}{12}\right) + \left(-\frac{10}{12}\right)}$$

$$T = \left(+\frac{39}{12}\right) + \underbrace{\left(+\frac{28}{12}\right) + \left(-\frac{58}{12}\right)}$$

$$T = \left(+\frac{67}{12}\right) + \left(-\frac{58}{12}\right) = \left(+\frac{9}{12}\right) = \left(+\frac{3}{4}\right)$$

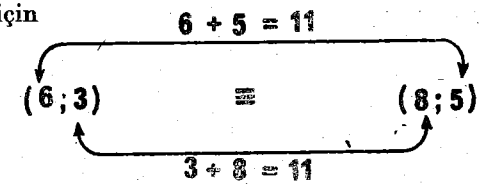
bulunur.

Uygulamalar :

1. (6 ; 3) ve (8 ; 5) nasıl ikililerdir? Bunlara denk ikililerin meydana getirdiği kümeyi yazınız ve belirtici elemanını söyleyiniz. Bu küme, hangi yönlü sayıyı belirtir?

Çözüm :

Bu ikililer için



olduğundan bu (6 ; 3) ve (8 ; 5) ikilileri birbirine **denktir.** Bu ikililere **denk** olan ikililerin kümesi

$A = \{ (3 ; 0) , (4 ; 1) , (5 ; 2) , (6 \quad , (7 \quad 4) , (8 ; 5) , \ldots \}$

dır. Bu kümenin özel belirticisi,

(3 ; 0) dır.

(3 ; 0) ikilisi, (+ 3) yönlü sayısını gösterir. Bu nedenle, A kümesi, (+ 3) yönlü sayısını belirtir.

2. (3 ; 5) ve (2 ; 4) nasıl ikililerdir? Bunlara denk olan ikililerin meydana getirdiği kümeyi yazınız ve özel belirtici elemanını söyleyiniz. Bu küme, hangi yönlü sayıyı belirtir?

Çözüm :

Bu ikililer için,

$$3 + 4 = 7 \text{ ve } 5 + 2 = 7$$

olduğundan bunlar birbirine denk ikililerdir.

Bunlara denk olan tüm ikililerin oluşturduğu küme

$B = \{(0\ ;\ 2)\ ,\ (1\ ;\ 3)\ ,\ (2\ ;\ 4)\ ,\ (3\ ;\ 5)\ ,\ (4\ ;\ 6)\ ,\ \ldots\}$

dir. Bu kümenin özel belirticisi

$(0\ ;\ 2)$ dir.

$(0\ ;\ 2) \longmapsto (-2)$ olarak gösterilir. Bu nedenle, B kümesinin belirttiği yönlü sayı (-2) 'dir.

3. $(5\ ;\ 5)$ ikilisine denk olan ikililerin meydana getirdiği kümeyi yazınız ve belirtici elemanını söyleyiniz. Bu küme, hangi yönlü sayıyı belirtir?

Çözüm :

Verilen ikiliye **denk** olan ikililerin oluşturduğu küme,

$C = \{(0\ ;\ 0)\ ,\ (1\ ;\ 1)\ ,\ (2\ ;\ 2)\ ,\ (3\ ;\ 3)\ ,\ (4\ ;\ 4)\ ,\ (5\ ;\ 5)\ ,\ (6\ ;\ 6)\ ,\ \ldots\}$

dir. Bu kümenin özel belirticisi

$(0\ ;\ 0)$ dır.

$(0\ ;\ 0) \longmapsto 0$ ile gösterilir. Bu nedenle, C kümesi 0 (sıfır) sayısını belirtir.

4. $(+4)$ tamsayısını nasıl bir ikili ile gösterebilirsiniz? Bu ikiliye denk olan ikililerin oluşturduğu kümeyi yazınız.

Çözüm :

$(+4)$ tamsayısını belirten ikililerin indirgenmiş biçimi $(3\ ;\ 0)$ dır. Bu ikiliye **denk** olan ikililerin oluşturduğu küme :

$E = \{(4\ ;\ 0)\ ,\ (5\ ;\ 1)\ ,\ (6\ ;\ 2)\ ,\ (7\ ;\ 3)\ ,\ (8\ ;\ 4)\ ,\ \ldots\}$

olur.

5. (-5) tamsayısını hangi ikili ile gösterebilirsiniz? Bu ikiliye denk olan ikililerin meydana getirdiği kümeyi yazınız.

Çözüm :

(-5) tamsayısını belirten ikililerin indirgenmiş biçimi $(0\ ;\ 5)$ tir. Bu $(0\ ;\ 5)$ ikilisine **denk** olan ikililerin oluşturduğu küme

$F = \{(0\ ;\ 5)\ ,\ (1\ ;\ 6)\ ,\ (2\ ;\ 7)\ ,\ (3\ ;\ 8)\ ,\ (4\ ;\ 9)\ ,\ (5\ ;\ 10)\ ,\ \ldots\}$

dir.

6. $(4\ ;\ 7)$ ve $(2\ ;\ 5)$ ikililerinin toplamını bulunuz. Elde ettiğiniz ikili hangi tamsayıyı gösterir?

Çözüm :

$$(4\ ;\ 7) + (2\ ;\ 5) = (4 + 2\ ;\ 7 + 5) = (6\ ;\ 12)$$

olur.

$(6\ ;\ 12)$ ikilisi

$$(6 - 6\ ;\ 12 - 6) = (0\ ;\ 6)$$

ikilisine **denktir.** Bu ikiliye karşılık olan tamsayı,

$(0\ ;\ 6) \longmapsto (-6)$ dır.

7. $(-7) + (+5)$ toplamını bulunuz. Sonra bu toplamın her terimini bir ikili biçiminde yazınız. Ve bu ikililerin toplamını bulunuz. Elde ettiğiniz sonuçları karşılaştırınız.

Çözüm :

(-7) ve $(+5)$ tamsayılarını belirten ikililerin indirgenmiş biçimleri :

$(0\ ;\ 7)$ ve $(5\ ;\ 0)$

dır. Bunların toplamı :

$$(0\ ;\ 7) + (5\ ;\ 0) = (0 + 5\ ;\ 7 + 0) = (5\ ;\ 7)$$

dir. $(5\ ;\ 7)$ ikilisi,

$$(5 - 5\ ;\ 7 - 5) = (0\ ;\ 2)$$

ikilisine **denktir.** Bu ikilinin belirttiği tamsayı (-2) dir. Sonuçların birbirine eşitliği görülüyor.

8. $(3\ ;\ 5)$ ve $(a\ ;\ 2)$ ikilileri veriliyor. Bu ikililerin birbirine denk olması için a ne olmalıdır?

Çözüm :

$(3\ ;\ 5)$ ikilisi,

$$(3 - 3\ ;\ 5 - 3) = (0\ ;\ 2)$$

ikilisine denktir.

$(a\ ;\ 2)$ ikilisinin $(0\ ;\ 2)$ ikilisine denk olabilmek için $a = 0$ olması yeter.

9. (7 ; 5) ve (4 ; b) ikililerinin denk olması için b nin değerini bulunuz.

Çözüm :

Verilen ikililerin denk olması için,

$$7 + b = 5 + 4 \text{ ya da } 7 + b = 9$$

eşitliği sağlanmalıdır. Doğalsayılarda çıkarmanın tanımına göre :

$$b = 9 - 7 \text{ ya da } b = 2$$

bulunur.

10. Toplamanın değişme özeliğini uygulayarak,

$$(+5) + (-2) = \Delta + (+5)$$

eşitliğinde Δ nın yerine konulacak sayıyı bulunuz.

Çözüm :

Toplamanın değişme özeliğine göre $\Delta = (-2)$ olur.

11. Toplama işleminde birleşme özeliğini uygulayarak aşağıdaki eşitlikte n yerine değerini koyunuz.

$$[(+2) + (-3)] + (+7) = (+2) + [n + (+7)]$$

Çözüm :

Toplama işleminde birleşme özeliğine göre,

$$[(+2) + (-3)] + (+7) = (+2) + [(-3) + (+7)]$$

yazılır. Öyleyse $n = (-3)$ tür.

12. $(-3) + a = 0$ olması için a nın yerine hangi sayıyı koymalıdır?

Çözüm :

Tamsayılar kümesinde toplama işlemine göre her elemanın bir tersi vardır. Bir eleman, tersi ile toplandığı zaman sonuç 0 (sıfır) olur. Şu halde :

$$(-3) + a = 0 \text{ eşitliğinde } a = (+3)$$

olur.

13. $\left(+\frac{2}{5}\right) + m = 0$ eşitliğinde m yerine hangi sayısı koymalıdır?

Çözüm :

Rasyonel sayılar kümesinde toplama işlemine göre her elemanın bir tersi vardır. Bir eleman, tersi ile toplandığı zaman sonuç 0 (sıfır) olur.

Öyleyse :

$$\left(-\frac{2}{5}\right) + m = 0 \text{ eşitliğinde } m = \left(+\frac{2}{5}\right)$$

olur.

14. $T = (-5) + \left(+\frac{4}{3}\right)$ toplamını bulunuz.

Çözüm :

$$(-5) = \left(-\frac{15}{3}\right)$$

olarak yazılır. Buna göre, istenen toplam :

$$T = \left(-\frac{15}{3}\right) + \left(+\frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{11}{3}\right)$$

bulunur.

ALIŞTIRMALAR

A Grubu :

1. Aşağıdaki sayı ikililerinin belirttiği tamsayıları gösteriniz :

a) (3 ; 5) , **b)** (9 ; 6) , **c)** (4 ; 4)

2. (2 ; 3) ikilisine **denk** olan ikililer kümesini yazınız; bu kümenin indirgenmiş elemanını bulunuz.

3. (5 ; 1) ikilisine **denk** olan ikililer kümesini yazınız. Bu kümenin indirgenmiş elemanı nedir?

4. (2 ; 2) ikilisine **denk** olan ikililer kümesini yazınız ve bu kümenin indirgenmiş elemanını bulunuz.

5. Aşağıdaki tamsayıları büyüklük sırasına göre diziniz :

-2 , -1 , -7 , $+5$, $+1$, 0 , -6 , $+9$

6. Aşağıdaki tamsayıları karşılaştırınız :

a) (-7) , $(+3)$, **b)** (-3) , $(+5)$; **c)** $(+6)$, (-2)

7. Aşağıdaki rasyonel sayıları büyüklük sırasına göre yazınız :

$\left(-\frac{1}{3}\right), \left(-\frac{2}{3}\right), \left(-1\frac{1}{2}\right), \left(+\frac{5}{2}\right), 0, \left(-\frac{4}{3}\right), \left(+\frac{7}{4}\right), \left(-\frac{5}{6}\right)$

8. Aşağıdaki toplama işlemlerini yapınız ve her birinde toplamı bulunuz :

a) $(-7)+(+7)$; **b)** $(-10)+(-3)$; **c)** $(+4)+(+8)$;

d) $(-9)+(+12)$; **e)** $\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(+\frac{2}{3}\right)$; **f)** $\left(+\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)$;

g) $\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(+\frac{1}{6}\right)$; **h)** $\left(-2\frac{1}{2}\right)+\left(-2\frac{1}{5}\right)$;

i) $(+12)+\left(-\frac{3}{2}\right)$; **j)** $\left(+3\frac{1}{4}\right)+\left(-2\frac{1}{3}\right)$.

B Grubu :

9. Toplama işleminin değişme özeliğine göre,

$$(-7)+\Delta=(+3)+(-7)$$

eşitliğine Δ yerine hangi sayıyı koymalıdır?

10. $\Delta+\square=?+\Delta$ eşitliğinde, ? işareti yerine hangi şekli koymalıdır?

11. Toplama işleminin değişme özeliğine göre,

$$\left(+\frac{3}{7}\right)+\square=\left(-\frac{5}{2}\right)+\left(+\frac{3}{7}\right)$$

eşitliğinde $\square$ yerine hangi sayıyı koymalıdır?

12. Toplama işleminin birleşme özeliğine göre,

$$(+7)+(-3)+(+2)=\Delta+(+2)+(-3)$$

eşitliğinde Δ yerine hangi sayıyı koymalıdır?

13. Toplamanın birleşme özeliğine göre,

$$(+10)+\square+(+7)=\Delta+(+8)+(+7)$$

eşitliğinde $\square$ ve Δ şekilleri yerine hangi sayıları koymalıdır?

C Grubu :

14. $(a+b)+c=a+(b+?)$ eşitliğinde "?" yerine hangi harfi koymalıdır?

15. Toplamanın birleşme ve değişme özeliklerini uygulayarak aşağıdaki toplama işlemlerini yapınız :

a) $(-3)+(+5)+(-1)+(+6)=?$

b) $(-7)+(-6)+(+10)+(-2)=?$

c) $(-7)+(+12)+(-8)+(+5)=?$

d) $\left(-\frac{3}{7}\right)+\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(+\frac{5}{14}\right)=?$

e) $\left(-\frac{5}{6}\right)+(+4)+\left(-\frac{2}{5}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(+\frac{1}{3}\right)=?$

f) $\left(-\frac{5}{2}\right)+(-6)+\left(+\frac{12}{5}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)+(+2)=?$

Uyarma :

Bundan sonra işareti yazılmayan bir sayının pozitif sayılacağını unutmayınız.

$\left(-\frac{5}{6}\right)+4$ ile $\left(-\frac{5}{6}\right)+(+4)$ aynı anlamdadır.

16. $a+b=0$ olduğuna göre $a=(-4)$ için b nin değeri nedir?

17. $\left(+\frac{3}{2}\right)+n=0$ eşitliğinde n yerine hangi sayıyı koymalıdır?

18. $(-5), \left(+\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{3}{4}\right), \left(+\frac{4}{5}\right)$ sayılarının her birinin toplamaya göre **tersi** olan elemanları yazınız ve bu elemanları büyüklük sırasına göre diziniz.

19. a) $x=(-15)$, $y=(+2)$, $z=(+13)$ ve

b) $x=7$, $y=9$, $z=(-18)$

olduğuna göre, $T=(x+y+z)$ toplamını bulunuz.

Okuma parçası

Rakamlarla ilgili tarih bilgisi :

Çok eski çağlardan beri uluslar alfabelerinin harflerini sayı işaretleri olarak kullanmışlardır. Mısırlılar'ın, sayıları **Hiyeroglif** denilen resimlerle gösterdiklerini biliyoruz. Matematikte bu çeşit gösterme biçimleri yüzyıllar boyunca kullanılmıştır.

Bugün kullandığımız rakamların Hindistan'dan geldiğini sanıyoruz. Milattan önce beşinci yüzyılda **Baskara (Bhascara)** adındaki bir Hint'li matematikçi, yönlü sayılarla ilgili ilk cebir kitabını yazdı. Eski Yunan Matematikçisi **Diyofant'ın (Diophantos)** İ Ö IV. yüzyılda yazdığı cebir kitabı çok ünlüdür. On üç bölümden meydana gelen bu kitabın ancak altı bölümü bulunabilmiştir. Bu bölümlerde cebir'in denklemler konusu üzerinde önemli incelemeler vardır.

Ünlü Türk matematikçisi Harzemli Musa (VIII. yüzyılda yaşamış tır.) zamanına göre en gelişmiş sayı işaretleriyle bir cebir kitabı yazmış tır. Bu kitap, on ikinci yüzyılın ortalarına doğru Lâtinceye çevrilmiştir. Böylelikle Harzemli Musa'nın cebir kitabı Avrupa'ya yayılmıştır.

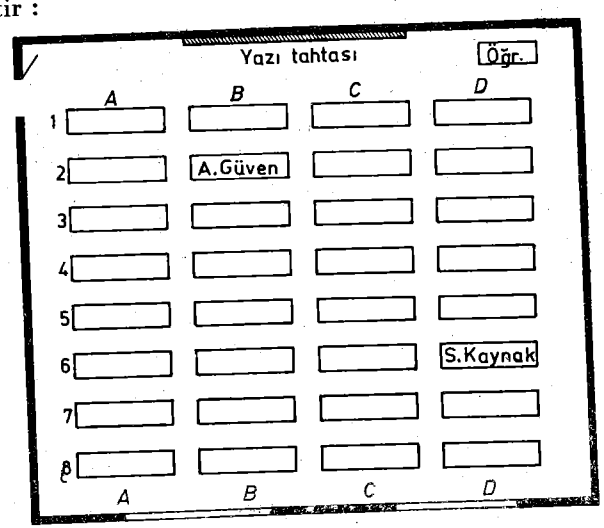
Avrupalılar Hint rakamları adını verdiğimiz sayı işaretlerini ve yönlü sayılarla yapılan işlemleri bu kitaptan öğrendiler. Bundan ötürü Harzemli Musa, geniş şekilde yayılan cebir kitabının ilk yazarı olarak kabul edilir.

Bütün genişliği ile sayıların harflerle gösterilmesini inceleyen Fransız matematikçisi Viète (Viyet)'tir (1530 — 1603).

2–4. BİR NOKTANIN KOORDİNATLARI

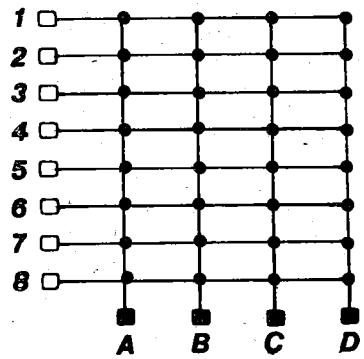
1. Yer Belirtme

Sınıfınızda bulunan öğrencilerin yerlerini belirten plan "12. şekilde, gösterilmiştir :



12. Şekil

Bu plan, ders yılı başında öğrencilerin sınıfta yerlerini kolaylıkla bulmaları için yapılmıştır. Planda, A , B , C , D dizileri ve her dizide 8 sıra vardır. Her sırada bir öğrenci oturuyor. Her dizideki sıralar da 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 sayıları ile gösterilmiştir. Sınıfta bulunan öğrencilerin listesi kapıya asılmıştır. Her öğrencinin adının karşısına, yeri ile ilgili dizi harfi ve sıra numarası yazılmıştır. Bu liste aşağıdaki gibi düzenlenir :



13. Şekil

Öğrencinin Adı Soyadı	Oturma Yeri
1. Ahmet Güven	(B ; 2)
2. Sevim Kaynak	(D ; 6)
3. Fuat Mayşık	(C ; 3)
4. Selim Çevik	(A ; 5)
5. Kâzım Ölçer	(B ; 4)
6. Ayşe Emiroğlu.....	(D ; 3)
7. Mehmet Deniz.....	(D ; 4)
8. Kemal Sağlam.....	(B ; 1)
.....	
.....	

Bu listeye göre öğrenci yerini kolaylıkla bulur.

Sınıftaki sıraların yerlerini birer nokta olarak gösterirsek, sınıf planını yandaki "13. şekilde" görüldüğü gibi sadeleştirmiş oluruz.

Bu gösterme biçiminde her öğrencinin yeri **ikili** ile gösterilmiştir. Bu **ikili**'nin birinci terimi yerin bulunduğu dizidir; ikinci terimi de sıra numarasıdır.

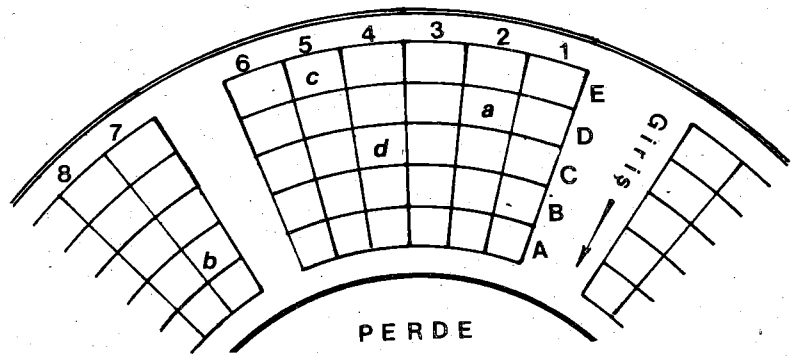
2. Bir Sinemada Yer Belirtme

Şekilde, bir sinemanın salonu görülüyor. Oturma yerleri A , B , C , D , E şeklinde sıralara ve 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , ... biçiminde de dizilere ayrılmıştır. Buna göre her seyircinin biletinde, oturacağı yerin harfi ile dizi numarası yazılıdır. Böylece yer göstericiler, seyircileri kolayca yerlerine yerleştirirler. Sözgelimi :

a seyircisinin yeri, biletinde (D ; 2)
b " " " (B ; 7)
c " " " (E ; 5)
d " " " (C ; 4)

olarak yazılır (14. şekil).

Bu örnekte de seyircilerin yerleri **ikililer** ile belirtilmiş olur.

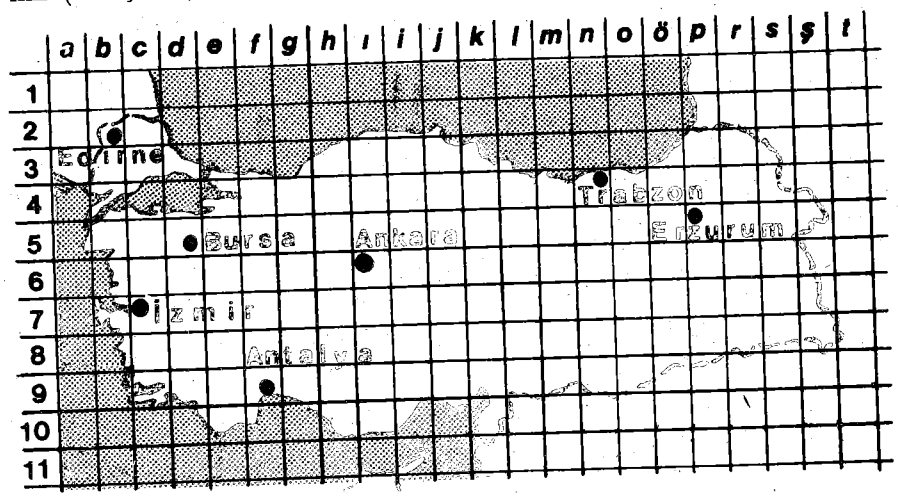


14. Şekil

3. Karelerle Yer Belirtme

Bir harita üzerinde yer belirtmek için bu harita karelere ayrılır. Böylece yatay ve düşey şeritler çizilir. Bu yatay ve düşey şeritlerle elde edilen kareler içinde bulunan yerler kolayca belirtilir.

Düşey şeritleri küçük harflerle, yatay şeritleri de sayılarla gösterelim (15. Şekil.)



15. Şekil

Şekle göre, şehirlerin yerleri ikililerle şöyle gösteriliz :

Ankara ..... (ı ; 6)
Bursa ..... (d ; 5)
İzmir ..... (c ; 7)
Erzurum ..... (p ; 5)
Antalya ..... (f ; 9)
Edirne ..... (b ; 2)
.....

4. Noktalarla, Karelerle, Oklarla Yer Belirtme

Örnek :

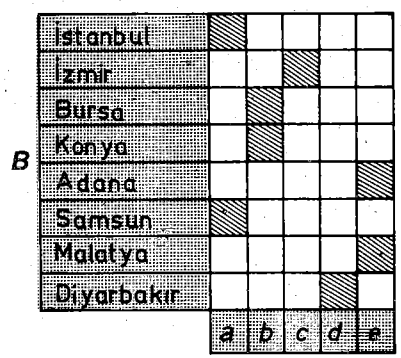
Bir fabrikanın ticaret temsilcileri a , b , c , d , e ile gösteriliyor. Bu temsilciler :

İstanbul, İzmir, Bursa, Konya, Adana, Samsun, Malatya, Diyarbakır illerinde fabrikanın ürünlerini tanıtmak amacıyla geziye çıkıyorlar.

Bu ticaret temsilcilerinin gezdikleri iller aşağıda üç ayrı biçimde gösterilmiştir :

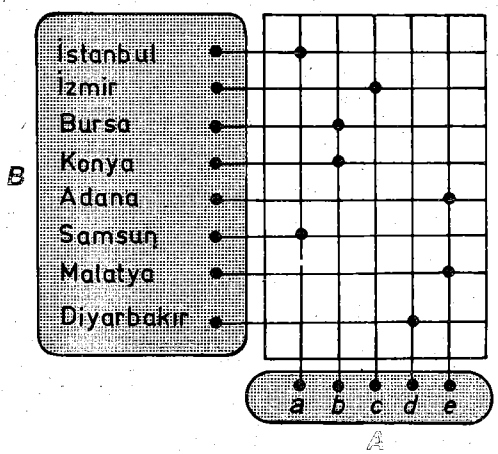
Burada a , b , c , d , e temsilcilerinin oluşturduğu küme A; gezilen illerin kümesi de B olsun. Bu üç şema ile A ve B kümelerinin elemanları arasında bir **eşleme** yapılmıştır :

Karelerle gösterilen şema



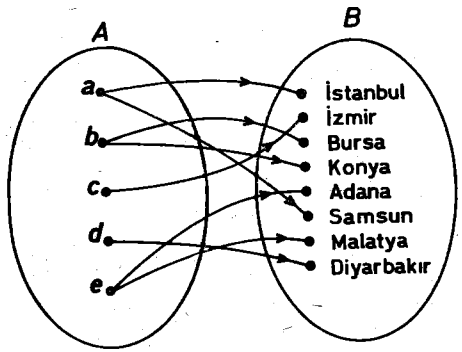
16. Şekil

Noktalarla gösterilen şema



17. Şekil

Oklarla gösterilen şema



18. Şekil

ALIŞTIRMALAR

A Grubu :

1. İstanbul'un turistik planını inceleyerek Ayasofya, Sultanahmet, Süleymaniye ve Fatih Camilerinin yerlerini belirtiniz. Bu plan üzerinde Topkapı ve Dolmabahçe Saraylarının yerlerini gösteriniz.

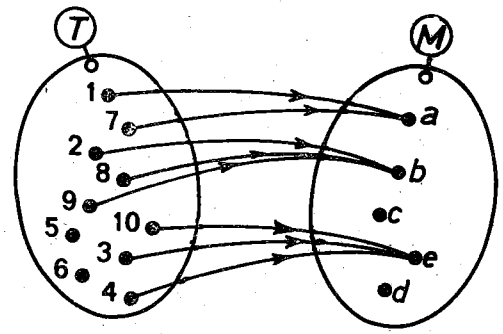
2. İlinizin turistik planı varsa, plan üzerinde şehrinizin önemli yerlerini gösteriniz.

3. Bir yapı işinde çalışan teknik elemanların meydana getirdiği küme :

$$T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

ile gösteriliyor. Bu kümede bulunan her sayı bir teknik elemanı belirtiyor. Bu yapı işindeki makinelerde $M = \{a, b, c, d\}$ kümesinin elemanlarıdır. Teknik elemanlar ve çalıştıkları makineler şöyle belirtiliyor :

1 ve 7 teknik elemanları a makinesinde; 2, 8, 9 teknik elemanları b makinesinde ve 3, 10, 4 teknik elemanları da e makinesinde çalışıyorlar.



19. Şekil

Teknik elemanlarla makineler arasındaki eşleme "19. şekilde" "**oklu şema**" ile gösterilmiştir.

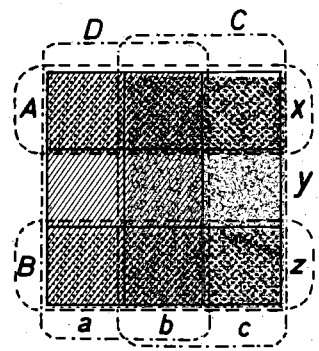
Bu elemanlarla makineler arasındaki eşlemenin :

a) Noktalarla gösterilen şemasını;
b) Karelerle gösterilen şemasını yapınız.
c) Bu makinelerde çalışmayan teknik eleman var mıdır?
d) Kullanılmayan makine var mıdır?

B Grubu :

4. "20. şekilde" gördüğünüz büyük kare 9 tane küçük kareye ayrılmıştır. x şeridindeki kareler A kümesi, z şeridindeki kareler de B kümesini oluşturuyorlar. Sonra b ve c şeritleri C kümesini, a ve b şeritleri de D kümesini meydana getiriyorlar.

1) $A \cap B$ kümesini bulunuz.



20. Şekil

küçük karelere yerleştiriniz.

2) $A \cup B$ kümesini bulunuz. Bu kümenin kaç elemanı vardır?

3) $D \cap C$, $C \cap A$, $B \cap D$ kümelerinin her birinde kaç tane kare vardır?

4) $A = \{2, 7, 6\}$
$B = \{4, 3, 8\}$
$C = \{7, 6, 5, 1, 3, 8\}$
$D = \{2, 7, 9, 5, 4, 3\}$

olarak veriliyor. Yukarıda A, B, C, D kümeleri için yapılan tanımlara göre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 doğalsayılarını

Her sıradaki üç sayıyı, her dizideki üç sayıyı ve köşegen üzerindeki üç sayıyı toplayınız; ne görüyorsunuz?

5. Sınıfınızda Ahmet, Güven, Kemal, Naci, Sami adlı öğrencilerden meydana gelen bir A kümesi var.

Matematik, fen bilgileri, sosyal bilgiler ve İngilizce derslerinden bir B kümesi oluşturuluyor.

Ahmet ve Sami, matematik dersinden iyi not alıyorlar. Güven fen bilgileri dersinden, Kemal sosyal bilgiler'den, Naci de İngilizce dersinden başarılıdır.

Bu A ve B kümelerinin elemanları arasında "**başarılı olma**" bakımından eşlemeyi :

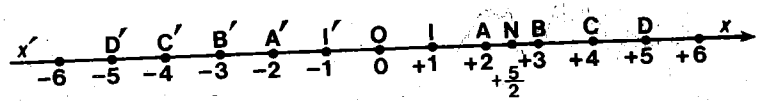
a) Oklu şema ile ;

b) Noktalı şema ile ;

c) Kareli şema ile gösteriniz.

5. Bir Doğru Üzerinde Bulunan Noktanın Koordinatı

Bir x'x doğrusu üzerinde bir O noktası alalım. Bu noktanın sağında ve solunda sözgelimi, 1 er cm. aralıkla noktalar işaretleyelim (21. şekil). O noktasına 0 (**sıfır**) sayısını, I noktasına da $(+1)$ sayısını eşleyelim. Buna göre, O nun sağındaki A, B, C, D, ... noktalarına sıra ile $(+2)$, $(+3)$, $(+4)$, $(+5)$, ... sayılarını ve O nun solundaki I', A', B', C', D', ... noktalarına da sıra ile (-1), (-2), (-3), (-4), (-5), ... sayılarını eşleriz.



21. Şekil

Böyle, üzerindeki noktalara birer sayı eşlenmiş olan doğruya **sayı doğrusu** denildiğini biliyoruz. O noktasına **başlangıç noktası** adı verilir.

Bu sayı doğrusu üzerindeki bir nokta ile eşlenen sayıya bu noktanın **koordinatı** diyoruz. Burada her noktayı kendi koordinatı ile birlikte yazarak gösteririz. Sözgelişi, A noktasını

$$A\ (+2)$$

biçiminde yazarız ve

"A nın koordinatı $(+2)$ dir"

diye okuruz. A nın koordinatı, $\overline{OA} = (+2)$ biçiminde de gösterilir. C' noktasını da $C'(-4)$ biçiminde yazar ve

"C' nün koordinatı (-4) tür"

deriz. Bunu da, $\overline{OC'} = (-4)$ biçiminde gösterebiliriz. Şekle göre,

O	noktasının	koordinatı	0
I	"	"	$(+1)$
A	"	"	$(+2)$
B	"	"	$(+3)$
C	"	"	$(+4)$
D	"	"	$(+5)$
I'	"	"	(-1)
A'	"	"	(-2)
B'	"	"	(-3)
C'	"	"	(-4)
D'	"	"	(-5)

dir.

Bu sayı doğrusu üzerinde A ve B noktaları arasındaki bir noktanın koordinatı $(+2)$ ile $(+3)$ arasında bir sayı olur. Sözgelimi, [AB] nin N orta noktasının koordinatı $(+2{,}5)$ dir.

[B' C'] nün orta noktasının koordinatı ne olur?

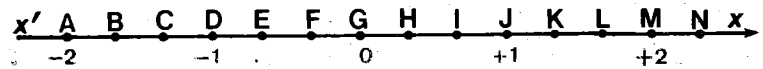
Uygulama :

Bir x'x doğrusu üzerinde soldan sağa doğru sırayla 1 er cm. aralıkla

A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M

noktaları alınıyor (22. şekil).

G noktası başlangıç ve [GJ] nin uzunluğu birim uzunluk seçiliyor. Buna göre, öteki noktaların koordinatları ne olur?



22. Şekil

Çözüm :

G (0) ve J (+ 1) olarak alınıyor. G nin sağında | GJ | = | JM | olduğundan, M noktasının koordinatı $\overline{GM} = (+2)$ olur. Öte yandan,

$$|GJ| = |GD| = |DA|$$

dır. J (+ 1) noktası, G başlangıç noktasının sağında; oysa D ve A noktaları G nin solundadır. Buna göre :

D nin koordinatı : $\overline{GD} = (-1)$;

A nın koordinatı : $\overline{GA} = (-2)$

olur.

Şimdi öbür noktaların koordinatlarını bulalım :

$$|GH| = \frac{1}{3}|GJ| \ , \ |GI| = \frac{2}{3}|GJ|$$

olduğundan :

H nin koordinatı : $\left(+\frac{1}{3}\right)$

I nın koordinatı : $\left(+\frac{2}{3}\right)$

dür. Benzer düşünce ile, noktaların G başlangıç noktasının sağında ya da solunda bulunmasına göre :

K nin koordinatı : $\left(+1\frac{1}{3}\right) = \left(+\frac{4}{3}\right)$

L nin koordinatı : $\left(+1\frac{2}{3}\right) = \left(+\frac{5}{3}\right)$

F nin koordinatı : $\left(-\frac{1}{3}\right)$

E nin koordinatı : $\left(-\frac{2}{3}\right)$

C nin koordinatı : $\left(-1\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3}\right)$

B nin koordinatı : $\left(-1\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{5}{3}\right)$

olur.

ALIŞTIRMALAR

A Grubu :

1. Uzunluk birimini 1 cm. olarak x'Ox sayı doğrusu üzerinde

A (+ 2), B (— 3), C (—1,5), D (+ 4,5)

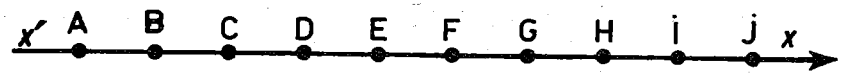
noktalarını işaretleyiniz.

2. Bir doğru üzerinde 1 er cm. aralıkla A, B, C, D, E, F, G, H, I noktaları işaretleniyor (23. şekil).

3. a) A noktası başlangıç ve B (+ 1) olarak alınırsa, öbür noktaların koordinatları ne olur?

b) B noktası başlangıç ve C (+ 1) olarak seçilirse, öbür noktaların koordinatları ne olur?

c) E noktası başlangıç ve F (+ 1) olarak seçilirse, öbür noktaların koordinatları ne olur?



23. Şekil

4. a) Başlangıç noktası O olan x'x sayı doğrusu üzerinde, uzunluk birimini 1 cm. seçerek, koordinatları sıra ile

(— 3) ; (+ 4) ; (+ 1,5) ; (— 5)

olan A, B, C, D noktalarını işaretleyiniz.

b) | AB |, | AC |, | BC |, | CD | uzunluklarını, birimleri sayarak bulunuz.

5. Bir x'x doğrusu üzerinde uzunluğu 1 dm. olan [OJ] doğru parçası işaretleniyor. Sonra bu doğru parçası, her biri 1 cm. uzunluğunda 10 eş parçaya bölünüyor. O dan J 'ye doğru bölüm noktaları sıra ile

A, B, C, D, E, F, G, H, I

olsun. O noktası başlangıç ve J noktasının koordinatı (+ 1) olarak seçildiğine göre, bu bölüm noktalarının koordinatları ne olur?

Yol gösterme :

$|OA| = \frac{1}{10}|OJ|$ olduğundan A nın koordinatı

$$\left(+\frac{1}{10}\right) = (+0{,}1)$$

dir. Öbür noktaların koordinatlarını da benzer yoldan bulunuz.

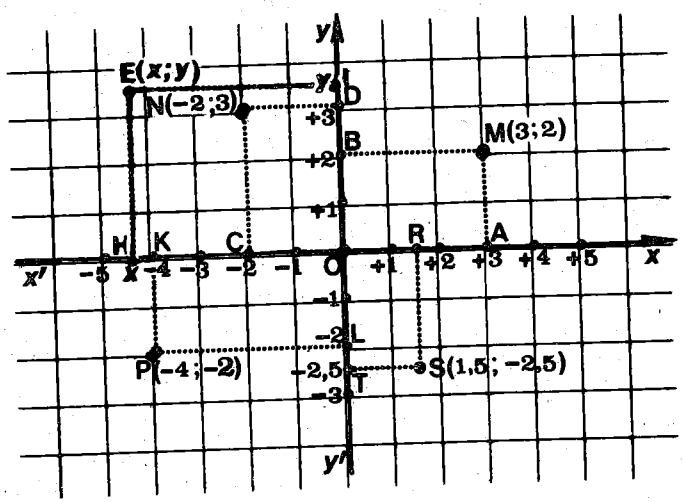
6. Bir x'x sayı doğrusu üzerinde başlangıç noktası O ve uzunluk birimi 1 cm. olarak seçilmiştir. Bu sayı doğrusu üzerinde :

A (— 5), B (— 4), C (— 1), D (+ 2), E (+ 3), F (+ 5), G (+ 7) noktalarını işaretleyiniz.

6. Düzlemde Bir Noktanın Koordinatları

Düzlemde, birbirine O noktasında dik olan x'x ve y'y sayıdoğrularını alalım (24. şekil).

Bu düzlemde verilen bir nokta M olsun. M den x'x doğrusuna [MA] dikmesini, y'y doğrusuna da [MB] dikmesini çizelim. Şekle göre, A nın x'Ox sayı doğrusu üzerindeki koordinatı (+ 3), B nin y'Oy sayı doğrusu üzerindeki koordinatı (+ 2) dir.



24. Şekil

(+ 3) sayısına M noktasının **apsisi,** (+ 2) sayısına da **ordinatı** diyoruz. Apsis ve ordinatın ikisine birden M noktasının **koordinatları** adını veriyoruz.

x'Ox sayı doğrusuna **apsisler ekseni,** y'Oy sayı doğrusuna **ordinatlar ekseni,** her ikisine birden de **koordinat eksenleri** adı verilir. Bu koordinat eksenlerinin belirttiği düzleme **koordinatlar düzlemi** diyeceğiz.

Apsisi (+ 3), ordinatı (+ 2) olan bu M noktasını kısaca

M (3 ; 2)

biçiminde gösteririz ve

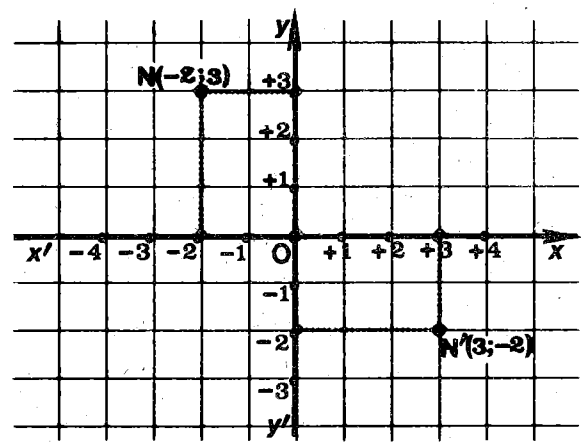
"M (üç ; iki) noktası"

diye okuruz. Burada parantez içine ilk yazılan sayı **apsis,** ikinci yazılan da **ordinattır.**

7. Koordinatları Bilinen Noktayı Bulmak

Apsisi (— 2), **ordinatı** (+ 3) olan noktanın düzlemdeki yerini belirtmek için :

x'Ox ekseni üzerinde **apsisi** (— 2) olan C noktasından bu eksene bir dikme çizilir. Sonra, y'Oy ekseni üzerinde **ordinatı** (+ 3) olan D noktasından bu eksene bir dikme çizilir. Bu iki dikmenin



25. Şekil

N kesim noktası, apsisi (— 2), ordinatı (+ 3) olan noktadır. Bu nokta,

N (— 2 ; 3)

biçiminde gösterilir.

"24. şekildeki" P ve S noktaları da

$$P(-4\ ;\ -2) \quad \text{ve} \quad S(1{,}5\ ;\ -2{,}5)$$

biçiminde gösterilir.

Genel olarak, apsisi x ordinatı y olan bir E noktası,

$$E(x\ ;\ y)$$

biçiminde gösterilir. Bu gösterme biçiminde apsis daima ilk önce yazılır. Apsis ile ordinatın sırasını değiştirirsek, düzlemdeki nokta da değişir. Örnek olarak, $N(-2\ ;\ 3)$ noktası ile $N'(3\ ;\ -2)$ noktası aynı değildir (25. şekil).

Düzlemde bir noktanın yerini belirtmeye yarayan $(-2\ ;\ 3)$ biçimindeki sayı ikilisinin elemanları bir sıraya göre yazılmıştır. Bu ikili, **sıralı bir ikilidir.**

Başka bir söyleyişle,

$$(-2\ ;\ 3) \neq (3\ ;\ -2)$$

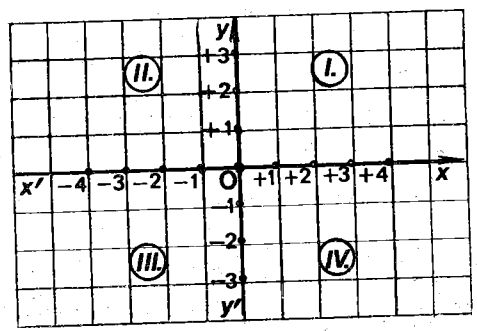
dir

Genel olarak, sıralı her $(x\ ;\ y)$ sayı ikilisine koordinatlar düzleminde bir E noktası karşılık olur. Ve koordinatlar düzleminin her E noktasına da sıralı bir $(x\ ;\ y)$ sayı ikilisi eşleşir.

Böylece, sıralı sayı ikilileri ile koordinatlar düzleminin noktaları arasında **bire-bir eşleme** kurulmuş olur.

8. Koordinat Eksenlerinin Düzlemde Ayırdığı Bölgeler

Koordinat eksenleri, düzlemi dört bölgeye ayırır. Bu bölgelerdeki noktaların apsis ve ordinatlarının işaretleri "26. şekilde" gösterilmiştir.



(−;+)	(+; +)
(−; −)	(+; −)

26. Şekil

Uyarma :

Koordinat eksenlerinin düzlemde ayırdığı bölgelerdeki noktaların koordinatlarının işaretlerini hatırda tutmak için "26. şeklin" yanındaki şemaya dikkat ediniz.

Bu şemada her parantez içinde görülen ilk işaret apsisin, ikinci işaret de ordinatın işaretidir.

ALIŞTIRMALAR

A Grubu :

1. Koordinat eksenlerini çizerek, aşağıdaki sıralı sayı ikililerinin belirttiği noktaları gösteriniz :

O (0;0) ; A (1;0) ; B (2;0) ; C (—1;0) ; D (—2;0)
E (0;2) ; F (0;3) ; G (0, —1) ; H (0;—4) ; I (2;4)
J (—2;4) ; K (2;4) ; L (2;—4) ; M (3;—3) ; N (—3;3)

2. Yukarıda verilen sıralı sayı ikililerinin belirttiği noktalardan :

a) Ordinatı 0 olan noktalar nerede bulunur?

b) Apsisi 0 olan noktalar nerede bulunur?

3. Kareli milimetrik bir kâğıda koordinat eksenlerini çiziniz. Uzunluk birimini 1 cm. alınız. Aşağıdaki sıralı sayı ikililerinin belirttiği noktaları gösteriniz :

A (4;1,5) B (—3,5;4) ; C (—4;—2,5) ; D (2,5;—3,4),
E (3;4) ; F (—3;4) ; G (—3;—4) ; E (3;—4)

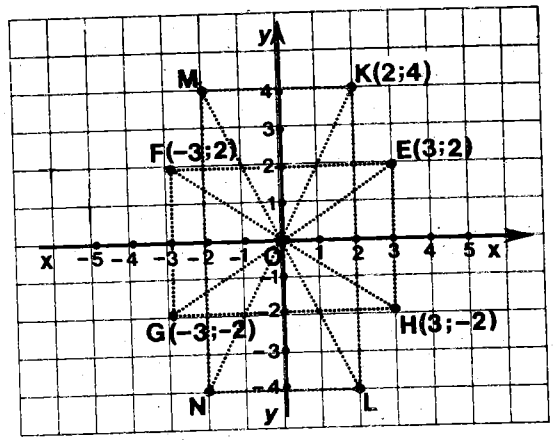
4. "27. şekilde" E, F, G, H noktalarının koordinatları arasındaki ilişkiye dikkat ediniz. Bu noktalardan :

E ile H ve F ile G, x'x eksenine göre **simetrik;**

E ile F ve H ile G, y'y eksenine göre **simetrik;**

E ile G ve F ile H, O başlangıç noktasına göre **simetrik** noktalardır.

K (2;4) noktasının koordinat eksenlerine ve O başlangıç noktasına göre simetriklerinin koordinatlarını söyleyiniz.



27. Şekil

5. a ve b rasyonel iki sayı olduğuna göre,

1) E (a;b) , F (—a;b) noktaları ne durumdadır?
2) E (a;b) , H (—a;—b) noktaları ne durumdadır?
3) E (a;b) , G (a;—b) noktaları ne durumdadır?

B Grubu :

6. $S = \{(5;-2) , (-3;-1) , (4;2) , (0;0) , (1;1) , (4;3)\}$ kümesini koordinatlar düzleminde belirtiniz.

Yol gösterme :

Bu kümenin elemanları, sıralı sayı ikilileridir. Bu ikililerin her biri, koordinatlar düzleminde bir nokta belirtir. S kümesi, bu noktaların kümesi olur.

7. $E = \{(-5;0) , (-3;0) , (-1;0) , (0;0) , (1;0) , (2;0) , (4;0)\}$ kümesini koordinatlar düzleminde belirtiniz.

8. $F = \{(0;-3) , (0;-2) , (0;0) , (0;1) , (0;3) , (0;4\}$ kümesini koordinatlar düzleminde belirtiniz.

9. $A = \{(-2;-2) , (-1;-1) , (0;0) , (1;1) , (2;2) , (3;3)\}$ kümesini koordinatlar düzleminde belirtiniz.

10. $B = \{(-3;3) , (-2;2) , (-1;1) , (0;0) , (1;-1) , (2;-2) , (3;-3)\}$ kümesini koordinatlar düzleminde belirtiniz.

11. $D = \{(2;-2) , (2;-1) , (2;0) , (2;1) , (2;2) , (2;3) , (2;4)\}$ kümesini koordinatlar düzleminde belirtiniz.

12. $E = \{(2;1) , (-1;1) , (0;1) , (1;1) , (2;1) , (3;1)\}$ kümesini koordinatlar düzleminde belirtiniz.

C Grubu :

13. Aşağıdaki sıralı sayı ikililerinin belirttiği noktalar, koordinatlar düzleminin hangi bölgesinde bulunurlar?

Noktalar	Bölgeler
a) (5; 2)	.....
b) (—3; 3)	.....
c) (—4;—1)	.....
d) (2;—4)	.....
e) (—6;—6)	.....

14. a) $S = \{A (3;1) , B (3;4)\}$ kümesini koordinatlar düzleminde belirtiniz. Bu kümenin kaç elemanı vardır?

b) A ve B noktalarını birleştiriniz. AB doğrusu hangi eksene paralel olur?

15. a) $T = \{C (0;2) , D (3;2)\}$ kümesini koordinatlar düzleminde belirtiniz. Bu kümenin kaç elemanı vardır?

b) C ve D noktalarını birleştiriniz. CD doğrusu hangi eksene paralel olur?

16. a) $P = \{O(0;0) , A (1;1) , B (2;2)\}$ kümesini koordinatlar düzleminde belirtiniz. Bu kümenin kaç elemanı vardır?

b) A ve B noktalarının, koordinat eksenlerine olan uzaklıkları hakkında ne söyleyebilirsiniz?

c) O ile A 'yı ve sonra O ile B 'yi birleştiriniz. Ne görüyorsunuz?

2–5. GRAFİKLER

Örnekler :

1. Apsisleri $x = 2$ olan noktaların meydana getirdiği kümeyi belirtelim :

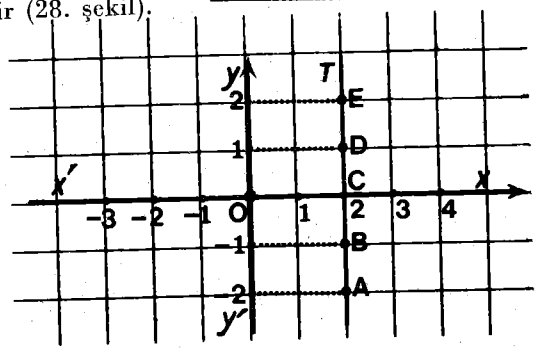
x'Ox ekseni üzrinde apsisi $(+2)$ olan C noktasından bu eksene çizilen dik doğruyu T ile gösterelim. Bu doğru üzerindeki noktaların apsisleri $(+2)$ dir; ordinatları değişiktir. Sözgelimi,

$$A\,(2;-2)\ ,\ B\,(2;-1)\ ,\ C\,(2;0)\ ,\ D\,(2;1)\ ,\ E\,(2;2)\ ,\ \ldots$$

noktalarının hepsi bu T doğrusunun üzerinde bulunurlar. Öyleyse, bu T doğrusu, apsisleri $x = 2$ olan ve ordinatları değişen tüm noktaların meydana getirdiği noktalar kümesidir. Bu T doğrusuna, kısaca

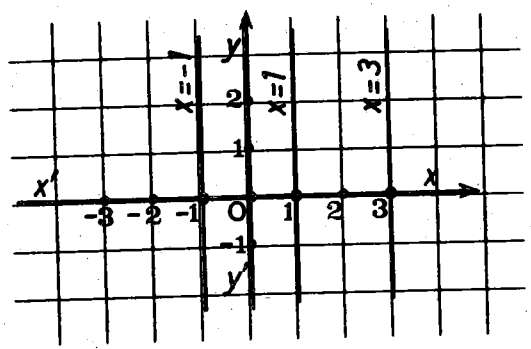
$$x = 2$$

doğrusu denir (28. şekil).



28. Şekil

2. "29. şekilde" $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$ doğrularını görüyorsunuz.



29. Şekil

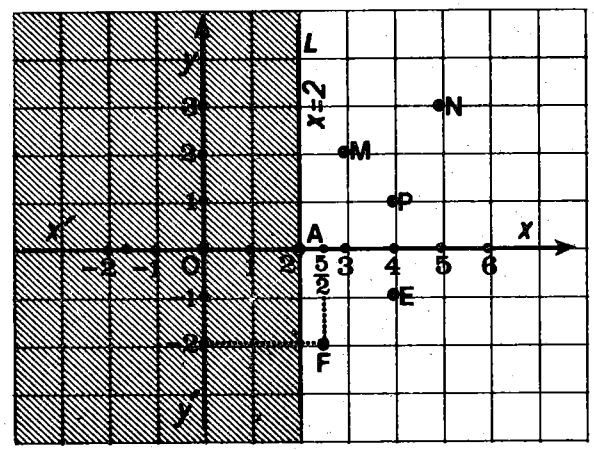
Siz de $x = -3$, $x = -2$, $x = +1{,}5$ doğrularını çiziniz.

3. y'Oy ekseninin üzerindeki her noktanın apsisi sıfırdır. Şu halde y'Oy eksenine, kısaca

$$x = 0$$

doğrusu diyebiliriz.

4. "30. şekilde" $x = 2$ doğrusu görülüyor. Bu doğruyu L ile gösterelim.



30. Şekil

Bu L doğrusu koordinatlar düzlemini iki yarım düzleme ayırır. Bunlardan biri L nin sağında, öbürü solundadır.

L doğrusunun sağ yanında bulunan noktaların apsisleri ile $(+2)$ sayısını karşılaştıralım. Sözgelimi, M (3;2), N (5;3), P (4;1), E (4;—1), F (2,5;—2) noktalarının apsisleri $(+2)$ den büyüktür. Şu halde bu bölgedeki noktaların apsislerini genel olarak x ile gösterirsek,

$$x > (+2)$$

yazarız. Buna göre şekilde L doğrusunun sağ yanında kalan yarım düzlem, apsisleri $(+2)$ den büyük olan tüm noktaların meydana getirdiği noktalar kümesidir. Bu küme kısaca

$$x > (+2)$$

bağıntısı ile bellidir.

L sınır doğrusunun üzerindeki noktalar bu kümeye ait değildir. Bu kümenin L sınır doğrusu ile birleşimi

$$x \geqslant (+2)$$

bağıntısı ile belli olan ve L sınır doğrusunu kapsayan bir yarım düzlemdir. (30. şekilde taranmamış kısım.)

ALIŞTIRMALAR

1. Apsisleri $x < 2$ bağıntısına uygun noktaların meydana getirdiği kümeyi şekille gösteriniz.

2. Apsisleri $x \leqslant 2$ bağıntısına uyan noktaların meydana getirdiği kümeyi şekille gösteriniz.

3. Apsisleri aşağıdaki bağıntılara uyan noktaların oluşturduğu kümeleri şekillerle belirtiniz :

a) $x > 0$; **b)** $x \geqslant 0$; **c)** $x < 0$; **d)** $x \leqslant 0$

e) $x > -3$; **f)** $x \geqslant -3$; **g)** $x < 1$; **h)** $x \leqslant 1$

5. Ordinatı $y = 2$ olan noktaların meydana getirdiği noktalar kümesini belirtelim :

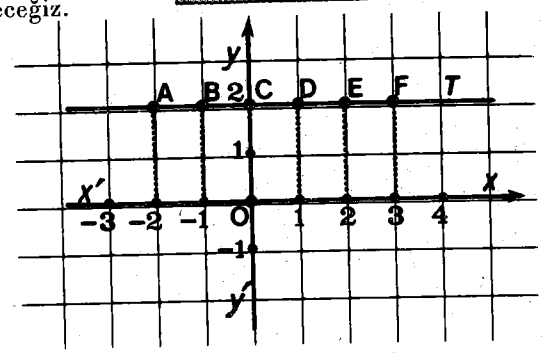
$y'Oy$ ekseni üzerinde ordinatı $(+2)$ olan C noktasından bu eksene çizilen dik doğruyu T ile gösterelim. Bu doğru üzerindeki noktaların ordinatları $(+2)$ dir; apsisleri değişiktir. Sözgelimi,

A $(-2;2)$, B $(-1;2)$, C $(0;2)$, D $(1;2)$, E $(2;2)$, F $(3;2)$

noktalarının hepsi bu T doğrusunun üzerinde bulunurlar. Öyleyse, bu T doğrusu, ordinatları $y = 2$ olan ve apsisleri değişen tüm noktaların meydana getirdiği noktalar kümesidir. Bu T doğrusuna kısaca,

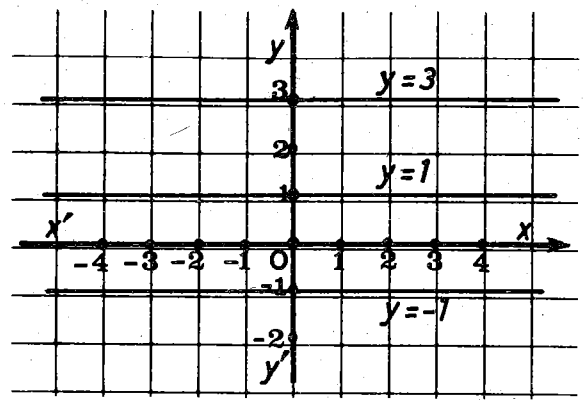
$$y = 2$$

doğrusu diyeceğiz.



31. Şekil

6. "32. şekilde" $y = -1$; $y = 1$; $y = 3$ doğrularını görüyorsunuz.



32. Şekil

Siz de $y = -3$; $y = -2$; $y = -0,5$ doğrularını çiziniz.

7. $x'Ox$ ekseni üzerindeki her noktanın ordinatı sıfırdır. Şu halde $x'Ox$ eksenine, kısaca

$$y = 0$$

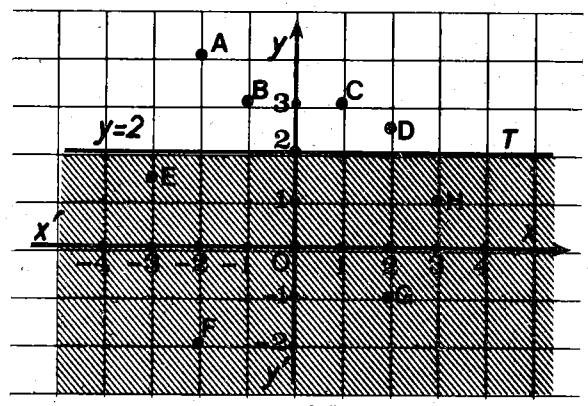
doğrusu diyebiliriz.

8. "33. şekilde" $y = 2$ doğrusu görülüyor. Bu doğruyu T ile gösterelim.

Bu doğru, koordinatlar düzlemini iki yarım düzleme ayırır. Şekilde bunlardan biri taranmış, öbürü taranmamıştır.

T doğrusunun üst tarafında bulunan noktaların ordinatları ile $(+2)$ sayısını karşılaştıralım. Sözgelimi,

A $(-2;4)$, B $(-1;3)$, C $(1;3)$, D $(3;2,5)$



33. Şekil

noktalarının ordinatları $(+2)$ den büyüktür. Öyleyse, bu bölgedeki noktaların ordinatlarını y ile gösterirsek

$$y > (+2)$$

yazarız. Buna göre, şekilde T 'nin üst yanında kalan yarım düzlem, ordinatları $(+2)$ den büyük olan tüm noktaların meydana getirdiği noktalar kümesidir. Bu küme, kısaca

$$y > 2$$

bağıntısı ile bellidir. T sınır doğrusunun üzerindeki noktalar bu kümenin noktaları değildir. Bu kümenin T sınır doğrusu ile birleşimi,

$$y \geqslant 2$$

bağıntısı ile belli olan ve T sınır doğrusunu kapsayan bir yarım düzlemdir.

ALIŞTIRMALAR

1. Ordinatları $y < 2$ bağıntısına uyan noktaların meydana getirdiği kümeyi şekille belirtiniz.

2. Ordinatları $y \leqslant 2$ bağıntısına uyan noktaların meydana getirdiği kümeyi şekille belirtiniz.

3. Ordinatları aşağıdaki bağıntılara uyan noktaların meydana getirdiği kümeleri şekillerle gösteriniz :

a) $y > 0$; **b)** $y \geqslant 0$; **c)** $y < 0$; **d)** $y \leqslant 0$;
e) $y > -1$; **f)** $y \geqslant -1$; **g)** $y < -1$; **h)** $y \leqslant -1$.

9. Ordinatları, apsislerine eşit olan noktaların meydana getirdiği noktalar kümesini belirtelim.

Ordinatı apsisine eşit bir $N(3;3)$ noktasını belirtmek için, $x'x$ ekseni üzerinde apsisi $\overline{OA} = +3$ olan A noktasından bu eksene bir dikme çizeriz. Sonra $y'y$ ekseni üzerinde ordinatı $\overline{OB} = +3$ olan B noktasından bu eksene bir dikme çizeriz. Bu iki dikmenin kesiştiği nokta

$$N(3;3)$$

noktası olur. Bu noktanın koordinat eksenlerine olan uzaklıkları eşittir. Bu nedenle $N(3;3)$ noktası, $\widehat{xOy}$ açısının açıortayı üzerinde bulunur.

Bunun gibi, sözgelişi,

$$(0;0),\ (1;1),\ (2;2),\ (3;3)\ \ (4;4)$$

$$(-1;-1),\ (-2;-2),\ (-3;-3),\ (-4;-4)$$

noktalarından her birinin ordinatı apsisine eşittir. Bu noktalar, koordinat eksenlerinin düzlemden ayırdığı (I. ve III.) bölgelerde ve koordinat eksenlerinden eşit uzaklıkta bulunurlar. $\widehat{xOy}$ açısının açıortayı $[OL$ olsun. Bunun uzantısı olan $[OL'$ ışını da $\widehat{x'Oy'}$ açısının açıortayıdır.

Ordinatı apsisine eşit olan her nokta

$$[OL \cup [OL' = L'L$$

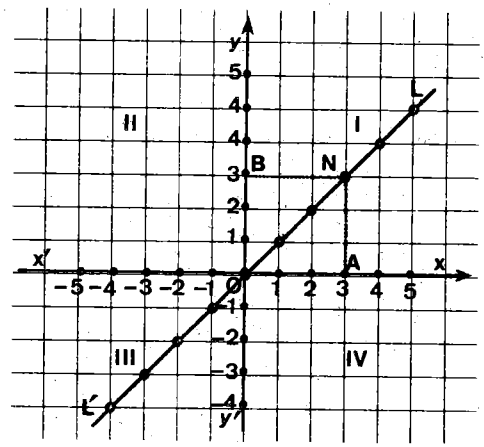
doğrusu üzerinde bulunur. Bu doğru, koordinat eksenlerinin meydana getirdiği $\widehat{xOy}$ ve $\widehat{x'Oy'}$ açılarının **açıortaylarının** birleşimidir. Öyleyse, $(x\ ;\ y)$ koordinatları arasında

$$y = x$$

bağıntısı bulunan –ordinatı apsisine eşit olan– tüm noktaların meydana getirdiği noktalar kümesi, LL' doğrusudur. Bu doğruya, kısaca

$$y = x$$

doğrusu diyeceğiz.



34. Şekil

10. (x ; y) koordinatları arasında

$$y = -x$$

bağıntısı bulunan noktaların meydana getireceği noktalar kümesini belirtelim.

Burada, sözgelimi apsisi $x = +3$ olan noktanın ordinatı $y = -3$ olacak demektir. Bu M (3;—3) noktasını belirtmek için x'x ekseni üzerinde apsisi $\overline{OA} = +3$ olan A noktasından bu eksene bir dikme çizeriz; sonra y'y ekseni üzerinde ordinatı $\overline{OC} = -3$ olan C noktasından y'y eksenine bir dikme çizeriz. Bu iki dikmenin kesiştiği nokta

$$M(3;-3)$$

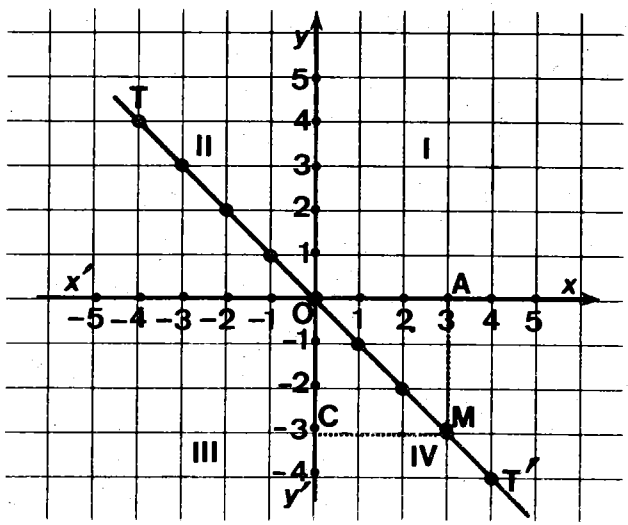
noktası olur. Bu noktanın koordinat eksenlerine olan uzaklıkları eşittir. ve 3 **birimdir.** Bu nedenle M (3;—3) noktası $\widehat{xOy'}$ açısının açıortayı üzerinde bulunur.

Bunun gibi, $y = -x$ bağıntısına uygun x ve y değerlerinden birkaç örnek aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir :

x	...	—5	—4	—3	—2	—1	0	1	2	3	4	5	...
y	...	5	4	3	2	1	0	—1	—2	—3	—4	—5	...

Burada,

(0;0), (1;—1), (2;—2), (3;—3), (4;—4), (5;—5)
(—1;1), (—2;2), (—3;3), (—4;4), (—5;5)



35. Şekil

noktalarından her birinin ordinatı, apsisinin ters işaretlisidir. Bu noktalar, koordinat eksenlerinin düzlemden ayırdığı (II.) ve (IV.) bölgelerde ve koordinat eksenlerinden eşit uzaklıkta bulunurlar.

$\widehat{x'Oy}$ açısının açıortayı [OT olsun. Bunun uzantısı olan [OT' ışını da $\widehat{xOy'}$ açısının açıortayı olur.

Ordinatı, apsisinin ters işaretlisine eşit olan her nokta

$$[OT \cup [OT' = TT'$$

doğrusu üzerinde bulunur. Bu doğru, koordinat eksenlerinin meydana getirdiği $\widehat{yOx'}$ ve $\widehat{xOy'}$ açılarının **açıortaylarının** birleşimidir. (35. şekil).

Öyleyse (x ; y) koordinatları arasında

$$y = -x$$

bağıntısı bulunan tüm noktaların meydana getirdiği noktalar kümesi, bu TT' doğrusudur.

Bu doğruya, kısaca,

$$\boxed{y = -x}$$

doğrusu diyeceğiz.

11. (x ; y) koordinatları arasında

$$y = x + 2$$

bağıntısı bulunan noktaların meydana getirdiği noktalar kümesini belirtelim :

Burada, sözgelimi, apsisi $x = -1$ olan noktanın ordinatı

$$y = (-1) + 2 = +1$$

olacak demektir.

Bunun gibi, $y = x + 2$ bağıntısına uygun olan x ve y değerlerinden birkaç örnek aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir :

x	...	—3	—2	—1	0	1	2	3	...
y = x + 2	...	—1	0	1	2	3	4	5	...

Koordinatlar düzleminde,

... , (—3;1), (—2;0), (—1;1), (0;2) ; (1;3) , (2;4) , (3;5) , ...

ikililerine karşılık olan noktalar sıra ile

... , A , B , C , D , E , F , G , ...

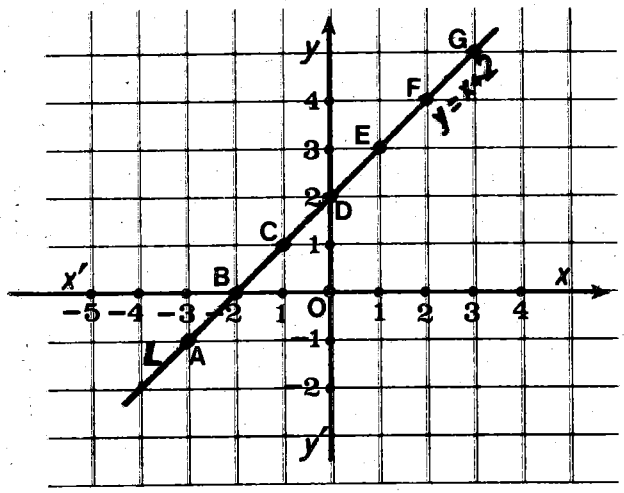
ile gösterilmiştir.

Bu noktalar birleştirildiği zaman hepsinin bir L doğrusu üzerinde bulunduğu görülür.

Bu L doğrusu üzerinde bulunan öbür noktaların koordinatları da

$$y = x + 2$$

bağıntısını sağlar.



36. Şekil

Bu nedenle, L doğrusu, koordinatları

$$y = x + 2$$

bağıntısını sağlayan noktaların meydana getirdiği kümedir. Bu kümeye kısaca

$y = x + 2$

doğrusu diyoruz.

12. (x ; y) koordinatları arasında

$$y = x - 3$$

bağıntısı bulunan noktaların kümesini belirtelim.

Burada, sözgelimi, apsisi $x = +2$ olan noktanın ordinatı

$$y = (+2) - 3 = -1$$

olur.

Bunun gibi, $y = x - 3$ bağıntısına uyan x ve y nin değerlerinden birkaç örnek aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir:

x	...	—1	0	1	2	3	4	...
y	...	—4	—3	—2	—1	0	1	...

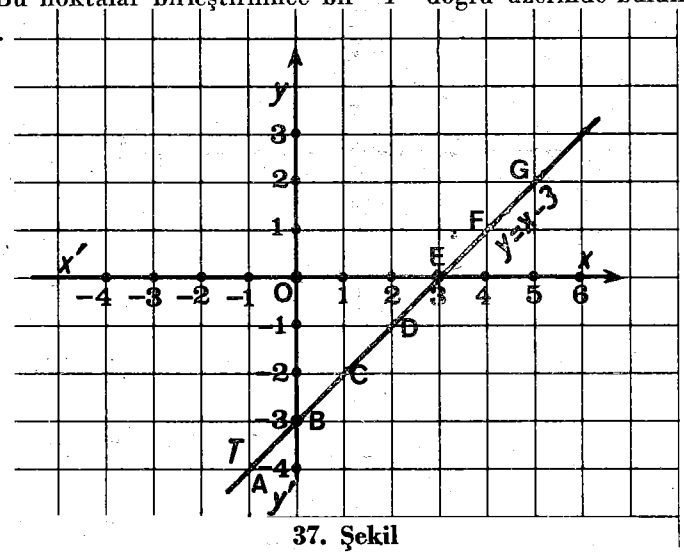
Koordinatlar düzleminde,

... , (—1 ; —4), (0 ; —3), (1 ; —2), (2 ; —1), (3 ; 0) , (4 ; 1)

ikililerine karşılık olan noktalar sıra ile

... , A , B , C , D , E , F , ...

olsun. Bu noktalar birleştirilince bir T doğru üzerinde bulundukları görülür.



37. Şekil

Bu T doğrusu üzerinde bulunan öbür noktaların koordinatları da

$$y = x - 3$$

bağıntısını sağlar.

Bu nedenle, bu T doğrusuna, kısaca,

$y = x - 3$

doğrusu diyoruz.

ALIŞTIRMALAR

A Grubu :

1. a) Koordinatlar düzleminde $y = -x$ bağıntısına uygun 8 tane nokta belirtiniz. Bu noktaları birleştiriniz.

b) $(-2{,}5\,;2{,}5)$, $(-1{,}5\,;1{,}5)$, $(1{,}5\,;-1{,}5)$, $(3{,}5\,;-3{,}5)$ ikililerinin görüntü noktalarını belirtiniz. Bu noktalar nerede bulunurlar?

2. $(x\,;y)$ koordinatları aşağıdaki bağıntılara uygun olan noktaların meydana getirdiği kümeleri şekillerle belirtiniz.

a) $y = -x$; **b)** $y = -x - 3$

c) $y = -x + 2$; **d)** $y = -x + 1$.

3. Aşağıdaki bağıntılara uygun olan $M\,(x\,;y)$ noktalarının meydana getirdiği kümeleri şekillerle belirtiniz :

a) $y = x - 1$; **b)** $y = x - 3$

c) $y = x - 2$; **d)** $y = x + 3$

4. a) $x = 1$; $x = 2$; $x = -3$ doğrularını çiziniz.

b) $y = -2$; $y = 1$; $y = 3$ doğrularını çiziniz.

B Grubu :

5. Apsisleri aşağıdaki bağıntılara uyan noktaların meydana getirdiği kümeleri şekillerle belirtiniz :

a) $x < -1$; **b)** $x > 5$;

c) $x > -2$; **d)** $x \geqslant 1$.

6. Ordinatları aşağıda verilen bağıntılara uyan noktaların kümelerini belirtiniz.

a) $y > 3$; **b)** $y \geqslant -2$;

c) $y < -3$; **d)** $y \leqslant 5$.

7. "38. şekilde" $y = x$ doğrusu çizilmiştir. Taranmamış bölgede alınan,

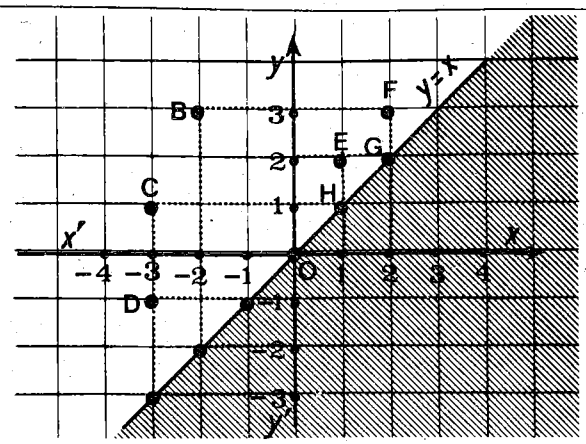
$A\,(-4;2)$, $B\,(-2;3)$, $C\,(-3;1)$,

$D\,(-3;-1)$, $E\,(1;2)$, $F\,(2;3)$,

noktalarının ordinatlarını apsisleriyle büyüklük bakımından karşılaştırınız. Ne görüyorsunuz? Genel olarak apsisi x, ordinatı y ile gösterilen bu noktalar için

$y > x$

olduğunu söyleyebilir misiniz?



38. Şekil

Şekilde taralı bölgede beş nokta işaret ediniz ve koordinatlarını yazınız. Yazdığınız ordinatlarla apsisleri karşılaştırınız. Bu bölgedeki noktalar için

$y < x$

olduğunu söyleyebilir misiniz?

Okuma parçası

Koordinat Eksenleri ile İlgili Tarih Bilgisi :

Düzlemde noktaların sayı ikilileri ile gösterilmesini, ilk kez, ünlü Fransız düşünürü ve matematikçisi René Descartes (Röne Dekart) ortaya koymuştur. 1596-1650 yılları arasında yaşamış olan Descartes çok erken yaşta matematik ve felsefe alanında büyük bir yeteneği olduğunu göstermiştir.

Descartes, 1637 yılında yayınladığı geometri kitabında, düzlemdeki noktaların koordinatları ile gösterilmesi ilkelesine dayanan **analitik geometriyi** kurdu. Böylece, geometri problemlerini hesap yöntemleri ile çözme olanağını sağladı.

Descardes, doğa bilimlerine karşı da yakın bir ilgi duymuştur. Fizikte, ışıkla ilgili çok önemli kurallar bulmuştur.

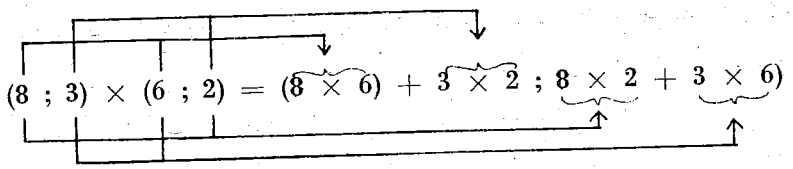
"Düşünüyorum, öyleyse varım" ünlü sözünü **Descartes** söylemiştir.

2-6. RASYONEL SAYILAR KÜMESİNDE ÇARPMA İŞLEMİ

1. İki Tamsayının Çarpması

Örnekler :

1. (8 ; 3) ve (6 ; 2) İkililerinin çarpmasını yapalım. Tanım olarak, (8 ; 3) ve (6 ; 2) ikililerine,



ya da

$$(8\ ;\ 3) \times (6\ ;\ 2) = (48 + 6\ ;\ 16 + 18) = (54\ ;\ 34)$$

işlemi ile (54 ; 34) ikilisi karşı gelir. Bu işleme, **ikililerin çarpma işlemi** denir. Burada (54 ; 34) ikilisi, (8 ; 3) ve (6 ; 2) ikililerinin **çarpımıdır.**

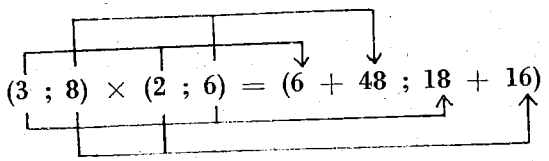
Öte yandan,

$(8\ ;\ 3) \equiv (5\ ;\ 0) \longmapsto (+5)$ ve $(6\ ;\ 2) \equiv (4\ ;\ 0) \longmapsto (+4)$

tür. Bunlara göre,

$$(+5) \times (+4) = (+20)$$

yazılır.

2. 

$$= (54\ ;\ 34)$$
$$\equiv (20\ ;\ 0) \longmapsto (+20)$$

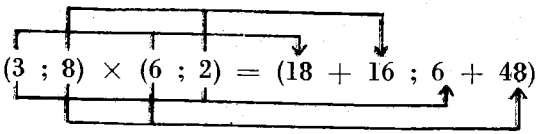
olur. Oysa,

$(3\ ;\ 8) \equiv (0\ ;\ 5) \longmapsto (-5)$ ve $(2\ ;\ 6) \equiv (0\ ;\ 4) \longmapsto (-4)$

tür. Bunlara göre,

$$(-5) \times (-4) = (+20)$$

yazılır.

3. 

$$= (34\ ;\ 54)$$
$$\equiv (0\ ;\ 20) \longmapsto (-20)$$

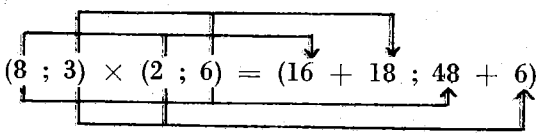
dir. Öte yandan,

$(3\ ;\ 8) = (0\ ;\ 5) \longmapsto (-5)$ ve $(6\ ;\ 2) = (4\ ;\ 0) \longmapsto (+4)$

olduğundan

$$(-5) \times (+4) = (-20)$$

yazılır.

4. 

$$= (34\ ;\ 54)$$
$$\equiv (0\ ;\ 20) \longmapsto (-20)$$

dir. Öte yandan,

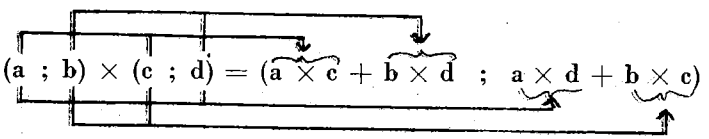
$(8\ ;\ 3) \equiv (5\ ;\ 0) \longmapsto (+5)$ ve $(2\ ;\ 6) \equiv (0\ ;\ 4) \longmapsto (-4)$

olduğundan

$$(+5) \times (-4) = (-20)$$

yazılır.

Genel olarak, her a, b, c, d $\in$ *D* için doğalsayı ikililerinin çarpma işlemi



(I)

olarak tanımlanır.

(×), çarpma işaretidir ve "**çarpı**" diye okunur. Bu işaret yerine kısaca ortaya bir nokta da konulabilir ve a × b yerine a . b ya da kısaca a b yazılır.

Yukarda bulunan sonuçlara göre, aşağıdaki kuralları söyleyebiliriz :

1) İşaretleri aynı olan iki tamsayının çarpımı pozitif bir tamsayıdır.
2) İşaretleri farklı olan iki tamsayının çarpımı negatif bir tamsayıdır.

2. Rasyonel İki Sayının Çarpması

Örnekler :

1. $\left(+\frac{3}{5}\right)\times\left(+\frac{2}{3}\right)=\left(+\frac{3\times2}{5\times3}\right)=\left(+\frac{6}{15}\right)=\left(+\frac{2}{5}\right)$;
2. $\left(-\frac{3}{5}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)=\left(+\frac{3\times2}{5\times3}\right)=\left(+\frac{6}{15}\right)=\left(+\frac{2}{5}\right)$;
3. $\left(-\frac{3}{5}\right)\times\left(+\frac{2}{3}\right)=\left(-\frac{3\times2}{5\times3}\right)=\left(-\frac{6}{15}\right)=\left(-\frac{2}{5}\right)$;
4. $\left(+\frac{3}{5}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)=\left(-\frac{3\times2}{5\times3}\right)=\left(-\frac{6}{15}\right)=\left(-\frac{2}{5}\right)$

olur.

Genel olarak,

$$\frac{a}{b}\in R\,,\ \frac{c}{d}\in R \quad \text{için} \quad \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d} \qquad \text{(II)}$$

olarak tanımlanır.

Uygulamalar :

1. $(3\ ;\ 7)$, $(5\ ;\ 3)$ doğalsayı ikililerini çarpınız. Sonucu bir tamsayı ile gösteriniz.

Çözüm :

Bu doğalsayı ikililerinin çarpımını bulmak için, tanım olarak verilen (I) formülünü uygulamak, işlemi uzatmak olur. Bu bakımdan verilen ikililere denk olan en sade ikililer alınır; sonra bunlara karşılık olan tamsayılar yazılır ve çarpılır.

$(3\ ;7)\equiv(0\ ;4)\ \longmapsto(-4)$ ve $(5\ ;3)\equiv(2\ ;0)\ \longmapsto(+2)$

olduğundan

$$(-4)\times(+2)=(-8)$$

bulunur.

Öte yandan, verilen sayılara (I) deki çarpma tanımı uygulanırsa :

$$(3\ ;\ 7)\times(5\ ;\ 3)=(15+21\ ;\ 9+35)$$

$$=(36\ ;\ 44)\equiv(0\ ;\ 8)\ \longmapsto(-8)$$

elde edilir. Bulunan iki sonucun aynı olduğu görülür.

2. $(5\ ;\ 12)$, $(7\ ;\ 9)$ doğalsayı ikililerine karşılık olan tamsayıları çarpınız.

Çözüm :

$(5\ ;\ 12)\equiv(0\ ;\ 7)\ \longmapsto -7$ ve $(7\ ;\ 9)\equiv(0\ ;\ 2)\ \longmapsto(-2)$ dır. Bunların çarpımı,

$$(-7)\times(-2)=(+14)$$

olur.

Bir kez de, verilen sayılara (I) deki çarpma tanımını uygulayınız. Bulduğunuz sonuca karşılık olan tamsayıyı yazarak önceki sonuçla karşılaştırınız.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki çarpma işlemlerini inceleyiniz :

a) $(+2)\times(+1)=(+2)$; **b)** $(+1)\times(+11)=(+11)$

c) $(-11)\times(+1)=(-11)$; **d)** $(+1)\times(-11)=(-11)$

e) $(+5)\times(-1)=(-5)$; **f)** $(-1)\times(+10)=(-10)$

g) $(-8)\times(-1)=(+8)$; **h)** $(-1)\times(-12)=(+12)$

$(+1)$ ile çarpılan sayının değişmediğine dikkat ediniz.

(-1) ile çarpılan sayı nasıl bir değişikliğe uğruyor?

2. Aşağıdaki çarpma işlemlerini inceleyiniz :

a) $\left(+\frac{1}{3}\right) \times \left(+\frac{4}{5}\right) = \left(+\frac{1\times4}{3\times5}\right) = \left(+\frac{4}{15}\right)$

b) $\left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right) = \left(+\frac{2\times3}{3\times4}\right) + \left(+\frac{6}{12}\right) = \left(+\frac{1}{2}\right)$

c) $\left(-\frac{7}{5}\right) \times \left(+\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{7\times1}{5\times2}\right) = \left(-\frac{7}{10}\right)$

d) $\left(+\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{5}{4}\right) = \left(-\frac{2\times5}{5\times4}\right) = \left(-\frac{10}{20}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)$

e) $\left(+1\right) \times \left(+\frac{7}{8}\right) = \left(+\frac{1\times7}{8}\right) = \left(+\frac{7}{8}\right)$

f) $\left(-\frac{5}{6}\right) \times \left(+1\right) = \left(-\frac{5\times1}{6}\right) = \left(-\frac{5}{6}\right)$

g) $\left(+\frac{3}{4}\right) \times \left(-1\right) = \left(-\frac{3\times1}{4}\right) = \left(-\frac{3}{4}\right)$

h) $\left(-1\right) \times \left(-\frac{5}{12}\right) = \left(+\frac{1\times5}{12}\right) = \left(+\frac{5}{12}\right)$

$(+1)$ ile çarpılan rasyonel sayının değişmediğine dikkat ediniz.

(-1) ile çarpılan rasyonel sayı nasıl bir değişikliğe uğrar?

3. Çarpma İşleminin Özelikleri

a) Kapalılık Özeliği

Örnekler :

1. $(+3) \times (-5) = (-15)$ dir. $-15 \in T$ olduğu apaçık görülüyor.

Bunun gibi :

$(+8) \times (+5) = (+40)$ dır ve $(+40) \in T$ olur.

$(-8) \times (-6) = (+48)$ dir ve $(+48) \in T$ olur.

$(-12) \times (+5) = (-60)$ dır ve $(-60) \in T$ olur.

Görülüyor ki, iki tamsayının çarpımı yine bir tamsayıdır. Şu halde :

Tamsayılar kümesi çarpma işlemine göre kapalıdır.

2. $\left(+\frac{1}{2}\right) \times \left(+\frac{3}{5}\right) = \left(+\frac{3}{10}\right)$ dur. $\left(+\frac{3}{10}\right) \in R$ olduğu apaçık görülüyor.

Bunun gibi :

$\left(+\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{5}{7}\right) = \left(-\frac{10}{21}\right)$ dir ve $\left(-\frac{10}{21}\right) \in R$ olur.

$\left(-\frac{4}{9}\right) \times \left(+\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{4}{18}\right)$ dir ve $\left(-\frac{4}{18}\right) \in R$ olur.

$\left(-\frac{1}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \left(+\frac{2}{15}\right)$ dir ve $\left(+\frac{2}{15}\right) \in R$ olur.

Görülüyor ki, rasyonel iki sayının çarpımı yine bir rasyonel sayıdır.

Örnekler üzerinde görülen bu özeliği sözle şöyle anlatırız :

Rasyonel sayılar kümesi, çarpma işlemine göre kapalıdır.

b) Değişme Özeliği

Örnekler :

1. $(-5) \times (+3) = (-15)$ ve $(+3) \times (-5) = (-15)$ olduğundan

$$(-5) \times (+3) = (+3) \times (-5)$$

yazılır.

2. $(-4) \times (-2) = (+8)$ ve $(-2) \times (-4) = (+8)$ olduğundan

$$(-4) \times (-2) = (-2) \times (-4)$$

yazılır. Şu halde :

Tamsayılar kümesinde, çarpma işleminin değişme özeliği vardır.

3. $\left(-\frac{3}{7}\right)\times\left(+\frac{5}{2}\right)=\left(-\frac{3\times5}{7\times2}\right)=\left(-\frac{15}{14}\right)$ ve

$\left(+\frac{5}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{7}\right)=\left(-\frac{5\times3}{2\times7}\right)=\left(-\frac{15}{14}\right)$

olduğundan

$$\left(-\frac{3}{7}\right)\times\left(+\frac{5}{2}\right)=\left(+\frac{5}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{7}\right)$$

yazılır.

4. $\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{5}{7}\right)=\left(+\frac{2\times5}{3\times7}\right)=\left(+\frac{10}{21}\right)$

$\left(-\frac{5}{7}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)=\left(+\frac{5\times2}{7\times3}\right)=\left(+\frac{10}{21}\right)$

olduğundan

$$\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{5}{7}\right)=\left(-\frac{5}{7}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)$$

yazılır. Şu halde :

Rasyonel sayılar kümesinde, çarpma işleminin değişme özeliği vardır.

c) Birleşme Özeliği

Örnekler :

1. $(-3)\times[(+2)\times(-5)]=(-3)\times(-10)=(+30)$

dur. Öte yandan,

$$[(-3)\times(+2)]\times(-5)=(-6)\times(-5)=(+30)$$

dur. Bulunan sonuçlar aynı olduğundan

$$(-3)\times[(+2)\times(-5)]=[(-3)\times(+2)]\times(-5)$$

yazılır. Şu halde :

Tamsayılar kümesinde çarpma işleminin birleşme özeliği vardır.

2. $\left(\frac{2}{3}\right)\times\left[\left(-\frac{7}{4}\right)\times\left(\frac{1}{5}\right)\right]=\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{7}{20}\right)=\left(-\frac{14}{60}\right)=\left(-\frac{7}{30}\right)$

dur. Öte yandan,

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{7}{4}\right)\right]\times\left(\frac{1}{5}\right)=\left(-\frac{14}{12}\right)\times\left(\frac{1}{5}\right)=\left(-\frac{14}{60}\right)=\left(-\frac{7}{30}\right)$$

dur. Bulunan sonuçlar aynı olduğundan,

$$\left(\frac{2}{3}\right)\times\left[\left(-\frac{7}{4}\right)\times\left(\frac{1}{5}\right)\right]=\left[\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{7}{4}\right)\right]\times\left(\frac{1}{5}\right)$$

yazılır. Şu halde :

Rasyonel sayılar kümesinde, çarpma işleminin birleşme özeliği vardır.

d) Etkisiz Eleman

Örnekler :

1. $(-5)\times(+1)=(-5)$; $(+7)\times(+1)=(+7)$

$(+1)\times(-8)=(-8)$; $(+1)\times(+12)=(+12)$

olduğu apaçık görülüyor. Öyleyse :

Tamsayılar kümesinde, çarpma işlemine göre etkisiz eleman (+ 1) dir.

2. $\left(-\frac{3}{8}\right)\times(+1)=\left(-\frac{3}{8}\right)$; $\left(+\frac{5}{6}\right)\times(+1)=\left(+\frac{5}{6}\right)$

$(+1)\times\left(-\frac{2}{3}\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)$; $(+1)\times\left(+\frac{3}{5}\right)=\left(+\frac{3}{5}\right)$

olduğu açıkça görülüyor. Şu halde :

Rasyonel sayılar kümesinde, çarpma işlemine göre etkisiz eleman (+ 1) dir.

e) Yutan Eleman

Örnekler :

1. $(+5) \times 0 = 0$; $(-5) \times 0 = 0$;
$0 \times (-7) = 0$; $0 \times (+1) = 0$

olduğu açıkça görülüyor. 0 (sıfır) kendisi ile çarpılan her sayıyı yutuyor. Şu halde :

Tamsayılar kümesinde 0 (sıfır), çarpma işlemine göre yutan elemandır.

2. $\left(+\frac{2}{3}\right) \times 0 = 0$; $0 \times \left(-\frac{5}{6}\right) = 0$

dır. Şu halde :

Rasyonel sayılar kümesinde 0 (sıfır), çarpma işlemine göre yutan elemandır.

f) Çarpmaya Göre Ters Eleman

Örnekler :

1. $\left(+\frac{1}{3}\right) \times (+3) = \left(+\frac{3}{3}\right) = (+1)$;

2. $(-5) \times \left(-\frac{1}{5}\right) = \left(+\frac{5}{5}\right) = (+1)$;

3. $\left(+\frac{2}{3}\right) \times \left(+\frac{3}{2}\right) = \left(+\frac{6}{6}\right) = (+1)$;

4. $\left(-\frac{5}{4}\right) \times \left(-\frac{4}{5}\right) = \left(+\frac{20}{20}\right) = (+1)$

olduğu açıkça görülüyor. Bu dört örnekteki çarpma işlemlerinin hepsinin sonucu (+ 1) dir. Çarpma işlemine göre (+ 1) sayısı **etkisiz elemandır.** Bu nedenle,

$\left(+\frac{1}{3}\right)$ ile $(+3)$; (-5) ile $\left(-\frac{1}{5}\right)$;

$\left(+\frac{2}{3}\right)$ ile $\left(+\frac{3}{2}\right)$; $\left(-\frac{5}{4}\right)$ ile $\left(-\frac{4}{5}\right)$

rasyonel sayılar kümesinde birbirinin **tersi** olan elemanlardır.

Genel olarak, aşağıdaki kuralı söyleyebiliriz :

$a \neq 0$ ve $b \neq 0$ olmak üzere $\frac{a}{b} \in R$ nin çarpmaya göre tersi olan eleman $\frac{b}{a}$ dır. Rasyonel sayılar kümesinde 0 (sıfır) dan başka her elemanın tersi vardır.

g) Çarpma İşleminin Toplama Üzerine Dağılma Özeliği

Örnekler :

1. $(-5) \times [(+7) + (-9)]$ işleminde önce köşeli parantez içindeki işlemi yaparsak,

$(+7) + (-9) = (-2)$ ve $(-5) \times (-2) = (+10)$

olur.

Öte yandan, (-5) ile $(+7)$ ve (-9) u ayrı ayrı çarpıp sonuçları toplarsak :

$$(-5) \times [(+7) + (-9)] = (-5) \times (+7) + (-5) \times (-9)$$
$$= (-35) + (+45) = (+10)$$

buluruz. İki sonucun aynı olduğu görülüyor.

2. $(-2) \times \left[\frac{1}{6} + \left(-\frac{5}{6}\right)\right]$

işleminde önce parantez içindeki işlemi yaparsak,

$\frac{1}{6} + \left(-\frac{5}{6}\right) = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$ ve $(-2) \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \left(+\frac{4}{3}\right)$

olur.

Öte yandan, (-2) ile $\frac{1}{6}$ ve $\left(-\frac{5}{6}\right)$ yı ayrı ayrı çarpalım ve bulduğumuz sonuçları toplayalım.

$$(-2) \times \left[\frac{1}{6} + \left(-\frac{5}{6}\right)\right] = (-2) \times \left(\frac{1}{6}\right) + (-2) \times \left(-\frac{5}{6}\right)$$
$$= \left(-\frac{2}{6}\right) + \left(+\frac{10}{6}\right)$$
$$= \left(+\frac{8}{6}\right) = \left(+\frac{4}{3}\right)$$

olur. İki sonucun aynı olduğuna dikkat ediniz. Şu halde :

Rasyonel sayılar kümesinde çarpma işleminin toplama üzerinde dağılma özeliği vardır.

ALIŞTIRMALAR

A Grubu :

1. Aşağıdaki çarpma işlemlerini yapınız :

a) $(-4) \times (-1) = ?$ **b)** $(-5) \times 0 = ?$

c) $(-4) \times (+8) = ?$ **d)** $(-5) \times (-6) = ?$

e) $(-10) \times (-18) = ?$ **f)** $(+17) \times (-3) = ?$

g) $(+12) \times (+1) = ?$ **h)** $(+11) \times (+25) = ?$

i) $(+0{,}5) \times (-0{,}2) = ?$ **j)** $(-0{,}2) \times (-0{,}5) = ?$

2. Aşağıdaki çarpma işlemlerini yapınız :

a) $\left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{2}{5}\right) = ?$ **b)** $\left(\frac{5}{6}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right) = ?$

c) $\left(\frac{11}{12}\right) \times \left(\frac{4}{5}\right) = ?$ **d)** $\left(-\frac{8}{9}\right) \times \left(-\frac{11}{10}\right) = ?$

3. Aşağıdaki çarpma işlemlerini yapınız :

a) $(-0{,}6) \times (-1{,}4) = ?$ **b)** $\left(-\frac{1}{2}\right) \times (-0{,}12) = ?$

c) $(+0{,}25) \times (+2{,}2) = ?$ **d)** $(+10{,}5) \times (-6{,}4) = ?$

B Grubu :

4. Aşağıdaki çarpma işlemlerini yapınız :

a) $(+4) \times (+3) \times (-5) = ?$

b) $(-18) \times (14) \times (-10) = ?$

c) $(-6) \times (+8) \times (-12) = ?$

d) $(-3) \times (-5) \times (-11) = ?$

e) $(-10) \times (-9) \times \left(-\frac{2}{3}\right) = ?$

f) $\left(-\frac{4}{5}\right) \times (12) \times \left(-\frac{5}{2}\right) = ?$

g) $(-0{,}2) \times \left(\frac{1}{5}\right) \times \left(-\frac{10}{9}\right) = ?$

h) $\left(-\frac{21}{3}\right) \times (-6) \times \left(\frac{2}{5}\right) = ?$

5. Aşağıdaki çarpma işlemlerinde parantezlerin içindeki soru işaretleri yerine gerekli sayıları yazınız :

a) $(?) \times (+5) = (-10)$; **b)** $6 \times (?) = (+12)$

c) $(-10) \times (?) = 100$; **d)** $(-5) \times (?) = (-20)$

e) $11 \times (?) = (-110)$; **f)** $(-1) \times (?) = (+1)$

g) $(-8) \times (?) = 0$; **h)** $(?) \times (+1) = (-1)$

i) $(-12) \times (?) = (+120)$; **j)** $(?) \times (-10) = (-90)$

k) $(?) \times (10) = 0$; **l)** $(-6) \times (?) = (-60)$

m) $\left(\frac{1}{2}\right) \times (?) = (-1)$; **n)** $\left(\frac{2}{3}\right) \times (?) = 1$

Yol gösterme :

a) $(?) \times (+5) = (-10)$

eşitliğinde, parantezin içindeki soru işareti yerine konacak sayı için şöyle düşününüz :

"$(+5)$ sayısı, hangi sayı ile çarpılırsa (-10) bulunur?"

Yanıt : (-2) dir.

Gerçekten,

$$(-2) \times (+5) = (-10) \text{ dur.}$$

Öteki soruları da aynı şekilde yanıtlayınız.

6. n bir tamsayıyı gösterdiğine göre $3n$; 3 ile n sayısının çarpılacağını anlatır. Buna göre aşağıdaki eşitliklerden n yerine hangi sayılar konulabilir :

a) $3n = (-6)$; **b)** $-3n = 30$;

c) $5n = (-25)$; **d)** $-2n = (-8)$;

e) $-6n = 12$; **f)** $-4n = 40$.

Yol gösterme :

a) $3n = (-6)$ eşitliğinde n sayısını bulmak için şöyle düşününüz :

"3 sayısı hangi sayı ile çarpılırsa (-6) bulunur?

Yanıt : $n = -2$ dir.

Gerçekten,

$$3 \times (-2) = (-6) \quad \text{dır.}$$

Öteki n sayılarını da aynı düşünüşle bulunuz.

2 — 7. RASYONEL SAYILAR KÜMESİNDE BÖLME İŞLEMİ

1. Bölme Kavramı

Örnekler :

1. $(+3) \times n = (+15)$

eşitliğinden n sayısını bulmak için şöyle düşününüz :

"$(+3)$ **sayısını hangi sayı ile çarpalım ki** $(+15)$ **bulunsun?**"

Yanıt : $n = +5$ tir.

Gerçekten,

$$(+3) \times (+5) = (+15)$$

olur. İşte bu eşitliği gerçekleyen $n = (+5)$ sayısına $(+15)$ sayısının $(+3)$'e **bölümü** denir ve şöyle yazılır :

$$(+15) : (+3) = (+5) \text{ ya da } \left(\frac{+15}{+3}\right) = (+5) .$$

2. $(-2) \times n = (-(16)$

eşitliğini sağlayan n sayısını bulalım. Şöyle düşünürüz :

"(-2) **sayısını hangi sayı ile çarpalım ki** (-16) **bulunsun?**"

Yanıt : $n = +8$ dir.

Gerçekten,

$$(-2) \times (+8) = (-16)$$

olur. Bu eşitliği gerçekleyen $n = +8$ sayısına, (-16) nın (-2) ye **bölümü** denir ve şöyle gösterilir :

Bölünen

$$(-16) : (-2) = (+8) \text{ ya da } \frac{(-16)}{(-2)} = (+8) \leftarrow \textbf{Bölüm}$$

Bölünen **Bölen** **Bölüm** **Bölen**

3. $(-5) \times n = (+20)$

eşitliğindeki n sayısını bulalım :

"(-5) **sayısını hangi sayı ile çarpalım ki** $(+20)$ **bulunsun?**"

Yanıt : $n = -4$ tür.

Gerçekten,

$$(-5) \times (-4) = (+20)$$

olur. Bu eşitliği gerçekleyen $n = -4$ sayısı, $(+20)$ nin (-5)'e **bölümüdür** ve

$$(+20) : (-5) = (-4) \text{ ya da } \frac{(+20)}{(-5)} = (-4)$$

biçiminde gösterilir.

4. $(+5) \times n = (-40)$

eşitliğindeki n sayısını bulalım :

"$(+5)$ **sayısını hangi sayı ile çarpalım ki** (-40) **bulunsun?**"

Yanıt : $n = -8$ dir.

Gerçekten,

$$(+5) \times (-8) = (-40)$$

olur. Bu eşitliği gerçekleyen $n = -8$ sayısına, "(-40) ın $(+5)$ e **bölümü**" denir ve bu işlem,

$$(-40) : (+5) = (-8) \text{ ya da } \frac{(-40)}{(+5)} = (-8)$$

şeklinde gösterilir.

Yukarıdaki dört örnekte de n sayısını bulmak için çarpma işlemindeki bilgimizden yararlandık. Bölümü bulmak için başka bir işlem yapmadık. n sayılarını akıldan bulduk. Oysa, daha büyük sayılar kullanıldığında bölümü akıldan bulmak güçleşir. Bu durumda, bölümü ancak bir işlem sonunda elde edebiliriz. İşte, iki sayısının bölümünü bulmak için yapılan işlemin adına **bölme işlemi** ya da kısaca **bölme** denir.

5. **0 : 8 bölmesinde bölüm sıfırdır.** Çünkü $8 \times 0 = 0$ dır.

6. **8 : 0 bölmesinin anlamı yoktur.** Çünkü 0 ile hiçbir sayının çarpımı 8'e eşit olamaz.

7. **0 : 0** bölmesinin de belli bir anlamı yoktur.

8. $(+21) \times n = (+252)$

eşitliğinden n'yi bulalım :

Rasyonel sayılar kümesinde $(+21)$'in çarpmaya göre tersi olan eleman $\left(+\frac{1}{21}\right)$ dir ve

$$(+21) \times \left(+\frac{1}{21}\right) = (+1)$$

olduğunu biliyoruz. Bu özelikten yararlanmak için, verilen eşitliğin iki yanını da $\left(+\frac{1}{21}\right)$ ile çarpalım :

$$(+21) \times n \times \left(+\frac{1}{21}\right) = (+252) \times \left(+\frac{1}{21}\right)$$

olur. Çarpmanın değişme ve birleşme özeliklerine göre,

$$\left[\underbrace{(+21) \times \left(+\frac{1}{21}\right)}\right] \times n = \left(+\frac{252}{21}\right)$$

$$(+1) \qquad \times n = \left(+\frac{252}{21}\right)$$

yazılır. $(+1)$ sayısı çarpma işleminde etkisiz eleman olduğundan $(+1) \times n = n$ dir. Şu halde, aradığımız n sayısı :

$$\mathbf{n = \left(+\frac{252}{21}\right)}$$

olur. 252 doğalsayısını 21 doğalsayısına bölmeyi biliyoruz.

$$\frac{252}{21} = 12$$

olduğundan aradığımız n sayısı, $n = (+12)$ olarak bulunur.

Öte yandan, önce verdiğimiz dört örnekte bölme, çarpmanın ters işlemi olarak tanımlandığından,

$$(+12) \times n = (+252) \quad \text{den} \quad n = \frac{(+252)}{(+21)}$$

yazılır. Şu halde :

$$n = \frac{(+252)}{(+21)} = (+12)$$

dir.

9. $\left(-\frac{2}{3}\right) \times n = (-5)$ eşitliğindeki n sayısını bulalım :

Rasyonel sayılar kümesinde çarpma işlemine göre $\left(-\frac{2}{3}\right)$ sayısının tersi olan eleman $\left(-\frac{3}{2}\right)$ dir ve

$$\left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) = (+1)$$

olur.

Bu özelikten yararlanarak n sayısını bulmak için, verilen eşitliğin iki yanını $\left(-\frac{3}{2}\right)$ ile çarpalım :

$$\left(-\frac{2}{3}\right) \times n \times \left(-\frac{3}{2}\right) = (-5) \times \left(-\frac{3}{2}\right)$$

olur. Çarpmanın değişme ve birleşme özeliklerine göre,

$$\left[\underbrace{\left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right)}\right] \times n = (-5) \times \left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$(+1) \qquad \times n = (-5) \times \left(-\frac{3}{2}\right)$$

yazılır. Rasyonel sayılar kümesinde $(+1)$ sayısı çarpmaya göre **etkisiz eleman** olduğundan

$$(+1) \times n = n$$

dir. Şu halde aradığımız n sayısı :

$$\mathbf{n = (-5) \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \left(+\frac{15}{2}\right)}$$

olarak bulunur. Öte yandan bölme çarpmanın **ters işlemi** olarak düşünülünce,

$$\left(-\frac{2}{3}\right) \times n = (-5) \quad \text{eşitliğinden} \quad \mathbf{n = (-5) : \left(-\frac{2}{3}\right)}$$

yazılır. Şu halde :

$$n = (-5) : \left(-\frac{2}{3}\right) = (-5) \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \left(+\frac{15}{2}\right)$$

dir.

Bu örneklerde yapılan işlemi sözle şöyle anlatırız :

Rasyonel sayılar kümesinin iki elemanını birbirine bölmek için, bölünen sayı, bölenin çarpmaya göre tersi olan eleman ile çarpılır. (Bölen sıfır olmayacak.)

Uygulamalar :

1. $(+36) : (+9) = (+36) \times \left(+\frac{1}{9}\right) = \left(+\frac{36}{9}\right) = (+4)$ tür.

2. $(-36) : (-9) = (-36) \times \left(-\frac{1}{9}\right) = \left(+\frac{36}{9}\right) = (+4)$ tür.

3. $(+36) : (-9) = (+36) \times \left(-\frac{1}{9}\right) = \left(-\frac{36}{9}\right) = (-4)$ tür.

4. $(-36) : (+9) = (-36) \times \left(+\frac{1}{9}\right) = \left(-\frac{36}{9}\right) = (-4)$ olur.

5. $(0) : (+5) = (0) \times \left(+\frac{1}{5}\right) = 0$ dır.

6. $(0) : (-5) = (0) \times \left(-\frac{1}{5}\right) = 0$ dır.

7. $\left(+\frac{3}{5}\right) : \left(+\frac{2}{7}\right) = \left(+\frac{3}{5}\right) \times \left(+\frac{7}{2}\right) = \left(+\frac{21}{10}\right)$ olur.

8. $\left(-\frac{3}{5}\right) : \left(-\frac{2}{7}\right) = \left(-\frac{3}{5}\right) \times \left(-\frac{7}{2}\right) = \left(+\frac{21}{10}\right)$ olur.

9. $\left(+\frac{3}{5}\right) : \left(-\frac{2}{7}\right) = \left(+\frac{3}{5}\right) \times \left(-\frac{7}{2}\right) = \left(-\frac{21}{10}\right)$ olur.

10. $\left(-\frac{3}{5}\right) : \left(+\frac{2}{7}\right) = \left(-\frac{3}{5}\right) \times \left(+\frac{7}{2}\right) = \left(-\frac{21}{10}\right)$ olur.

11. $\left(+\frac{5}{2}\right) : (+1) = \left(+\frac{5}{2}\right) \times \left(+\frac{1}{1}\right) = \left(+\frac{5}{2}\right)$ dir.

12. $\left(+\frac{5}{2}\right) : (-1) = \left(+\frac{5}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{1}\right) = \left(-\frac{5}{2}\right)$ olur.

13. $(+1) : \left(+\frac{3}{5}\right) = (+1) \times \left(+\frac{5}{3}\right) = \left(+\frac{5}{3}\right)$ tür.

14. $(0) : \left(-\frac{2}{9}\right) = 0 \times \left(-\frac{9}{2}\right) = 0$ dır.

15. $(0) : \left(-\frac{5}{6}\right) = 0 \times \left(-\frac{6}{5}\right) = 0$ olur.

Uyarma :

Rasyonel iki sayının çarpımının işareti ile bölümünün işareti aynıdır. Bu durum, yukarıdaki örneklerde açıkça görülüyor.

Özet :

Birinci sayının işareti	İkinci sayının işareti	Çarpımın işareti
(+)	(+)	(+)
(−)	(−)	(+)
(+)	(−)	(−)
(−)	(+)	(−)

Bölünenin işareti	Bölenin işareti	Bölümün işareti
(+)	(+)	(+)
(−)	(−)	(+)
(+)	(−)	(−)
(−)	(+)	(−)

2. Bölme İşleminin Özelikleri

Örnekler :

1. $(-15) : (+6) = n$ eşitliğini sağlayan n sayısı nedir?

$$n = (-15) : (+6) = (-15) \times \left(+\frac{1}{6}\right) = \left(-\frac{15}{6}\right) = \left(-\frac{5}{2}\right) \notin T$$

dir. Buna göre, iki tamsayının bölümü her zaman bir tamsayı değildir. Öyleyse :

Tamsayılar kümesi bölme işlemine göre kapalı değildir.

2. $\left(-\frac{7}{4}\right) : \left(+\frac{8}{3}\right) = n$

eşitliğini sağlayan n sayısı nedir?

$$n = \left(-\frac{7}{8}\right) : \left(+\frac{8}{3}\right) = \left(-\frac{7}{4}\right) \times \left(+\frac{3}{8}\right) = \left(-\frac{21}{32}\right) \in R$$

dir. Buna göre, iki rasyonel sayının bölümü yine bir rasyonel sayıdır (Bölen sıfır olmayacak). Öyleyse :

Rasyonel sayılar kümesi, bölme işlemine göre kapalıdır.

1. Aşağıdaki bölmeleri yapınız :

a) $(+42) : (+6) = ?$ **b)** $(-72) : (-8) = ?$

c) $(+18) : (-3) = ?$ **d)** $(-729) : (+27) = ?$

e) $(+8) : \left(-\frac{2}{5}\right) = ?$ **f)** $\left(\frac{2}{5}\right) : \left(-\frac{5}{6}\right) = ?$

2. Aşağıdaki çizelgelerde gördüğünüz boş gözlere uygun sayıları yazarak çizelgeleri tamamlayınız :

a)

n	4	?	0	−2	−5
$\frac{1}{2}$n	?	1	?	?	?

b)

n	0	?	?	6	−1	?
−5 n	?	14	−4	?	?	6

3. Aşağıdaki bölme işlemlerini yapınız :

a) $\frac{-18}{-6}$; **b)** $\frac{-40}{5}$; **c)** $\frac{-30}{-6}$, **d)** $\frac{30}{6}$;

e) $\frac{-120}{-20}$; **f)** $\frac{-36}{-18}$; **g)** $\frac{253}{-11}$; **h)** $\frac{-441}{-21}$;

ı) $\frac{-180}{15}$; **j)** $\frac{0}{-5}$; **k)** $\frac{0}{7}$; **l)** $\frac{39}{-3}$.

4. Aşağıdaki eşitlikleri gerçekleyen s sayılarını bulunuz :

a) $2s = (-8)$; **b)** $(-2)s = 9$; **c)** $(-7)s = (-14)$;

d) $2s = \frac{8}{5}$; **e)** $3s = \left(-\frac{6}{7}\right)$; **f)** $(-6)s = (+9)$;

g) $10s = (-12)$; **h)** $10s = \left(-\frac{50}{64}\right)$; **i)** $(-12)s = 144$.

5. $E = \left\{1, \left(-\frac{2}{3}\right), 5, \frac{1}{6}, \left(-\frac{7}{8}\right)\right\}$

kümesinde çarpma işlemine göre her elemanın **tersi** olan elemanı bulunuz ve bu ters elemanların oluşturduğu F kümesini yazınız.

6. $\left(+\frac{18}{25}\right)$ rasyonel sayısını, aşağıdaki sayılardan uygun olan ikisini kullanarak yazınız :

$$(+18) , (-18) , (+25) , (-25)$$

7. $\left(+\frac{15}{14}\right)$ rasyonel sayısını, aşağıdaki sayılardan uygun olan ikisini kullanarak yazınız :

$$(+15) , (-15) , (+14) , (-14)$$

2 — 3 RASYONEL SAYILAR KÜMESİNDE ÇIKARMA İŞLEMİ

1. Çıkarma Kavramı

Örnekler :

1. $7 + 5 = 12$ toplama işleminde terimlerden birinin bilinmediğini düşünelim.

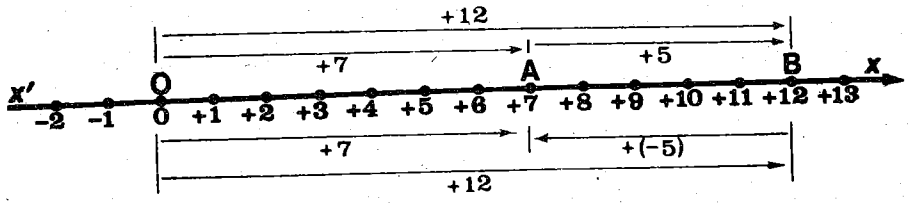
$n + 5 = 12$ eşitliğini gerçekleyen n sayısının $n = 7$ olacağını akıldan kolayca buluruz. Bu sayı

$$7 = 12 - 5$$

biçiminde gösterilir ve

"12 ile 5 'in farkı 7 'dir"

diye okunur. Bunu, aşağıdaki sayı ekseni üzerinde kolayca görüyorsunuz :



39. Şekil

2. $7 + (-5) = 2$ toplama işlemini ele alalım.

$(n) + (-5) = 2$ eşitliğini gerçekleyen n sayısının $n = 7$ olacağını akıldan buluruz. Fakat sayılar daha büyük olursa n'yi akıldan bulmak güçleşir; bir işlem yapmak zorunlu olur.

Tamsayılar kümesinde, toplama işlemine göre (-5) sayısının tersi olan eleman $(+5)$ tir ve $(-5) + (+5) = 0$ olur. Bu özelikten yararlanarak n 'yi bulmak için,

$$(n) + (-5) = 2$$

eşitliğinin iki yanına $(+5)$ ekleyelim :

$$n + \underbrace{(-5) + (+5)} = 2 + (+5)$$

$$n + \quad 0 \quad = 2 + (+5)$$

yazılır. 0 (sıfır) sayısı, toplama işleminde etkisiz eleman olduğundan,

$$n + 0 = n$$

dir. Buna göre yukarıdaki eşitlikten

$$n = 2 + (+5) = 7$$

bulunur. Bu sayı, tanım olarak,

$$2 - (-5) = 7$$

biçiminde yazılır ve

"2 ile (−5) in farkı 7 dir"

diye okunur.

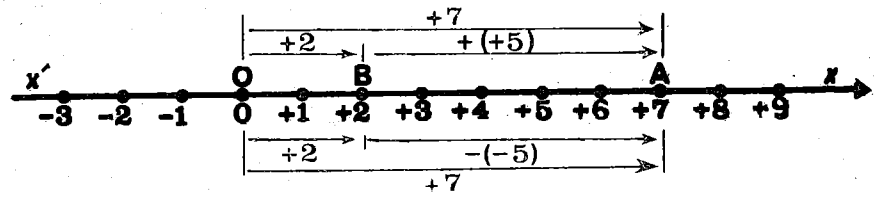
İki sayının farkını bulmak için yapılan işleme **çıkarma işlemi** ya da **çıkarma** diyoruz. Burada $n = 7$ sayısını veren iki ifadeyi eşitleyelim :

$$2 - (-5) = 2 + (+5) = 7$$

olur. Şu halde :

2 den (−5) i çıkarmak için 2 ile (+5) i toplarız.

Bu toplama ve çıkarma işlemleri aşağıda sayı ekseni üzerinde açıkca görülüyor :



40. Şekil

Genel olarak, iki tamsayının farkını bulmak için şu kural uygulanır :

İki tamsayının farkını bulmak için, ikinci sayının toplamaya göre tersi olan tamsayı, birinci tamsayı ile toplanır.

2. Çıkarma İşleminin Özelikleri

a) Kapalılık Özeliği

Örnekler :

1. $15 - (+10) = 15 + (-10) = (+5) \in T$;
2. $15 - (-10) = 15 + (+10) = (+25) \in T$;
3. $(-15) - (+10) = (-15) + (-10) = (-25) \in T$;
4. $(-15) - (-10) = (-15) + (+10) = (-5) \in T$;
5. $(-7) - (+4) = (-7) + (-4) = (-11) \in T$;
6. $1 - (-2) = 1 + (+2) = (+3) \in T$;
7. $1 - (+3) = 1 + (-3) = (-2) \in T$;
8. $2 - (+10) = 2 + (-10) = (-8) \in T$.

Yukarıdaki örneklerde, iki tamsayının farkının yine bir tamsayı olduğu görülüyor. Şu halde :

Tamsayılar kümesi çıkarma işlemine göre kapalıdır.

9. $\frac{3}{5}-\frac{1}{5}=\frac{3}{5}+\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{3+(-1)}{5}=\frac{2}{5}\in R$;

10. $\frac{3}{5}-\frac{4}{6}=\frac{18}{30}+\left(-\frac{20}{30}\right)=\frac{18+(-20)}{30}=\frac{-2}{30}=\left(-\frac{1}{15}\right)\in R$;

11. $\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{3}{2}\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(+\frac{3}{2}\right)=\left(-\frac{4}{6}\right)+\frac{9}{6}$

$=\frac{-4+9}{6}=\frac{5}{6}\in R$;

12. $\left(-\frac{13}{6}\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)=\left(-\frac{13}{6}\right)+\left(+\frac{2}{3}\right)=\left(-\frac{13}{6}\right)+\frac{4}{6}$

$=\frac{-13+4}{6}=\frac{-9}{6}=-\frac{3}{2}\in R$;

13. $\left(-\frac{13}{5}\right)-\left(-\frac{3}{5}\right)=\left(-\frac{13}{5}\right)+\left(+\frac{3}{5}\right)=-\frac{13}{5}+\frac{3}{5}$

$=\frac{-13+3}{5}=\frac{-10}{5}=-2\in R$ dir.

Genel olarak,

Rasyonel sayılar kümesinin iki elemanının farkını bulmak için çıkanın yerine, bunun toplamaya göre tersi olan eleman alınır ve sonra toplama işlemi yapılır.

Yukarıda, iki rasyonel sayının farkının yine bir rasyonel sayı olduğu görülüyor. Şu halde :

Rasyonel sayılar kümesi çıkarma işlemine göre kapalıdır.

b) Değişme özeliği :

Örnekler :

1. $15-10=+5$ ve $10-15=-5$

dir. Bu iki sonucun eşit olmadığı görülüyor :

$$15-10\neq 10-15$$

yazılır.

2. $\frac{2}{7}-\left(-\frac{1}{14}\right)=\frac{2}{7}+\left(+\frac{1}{14}\right)=\frac{4}{14}+\frac{1}{14}=\frac{5}{14}$ ve

$\left(-\frac{1}{14}\right)-\left(\frac{2}{7}\right)=\left(-\frac{1}{14}\right)+\left(-\frac{2}{7}\right)=\left(-\frac{1}{14}\right)+\left(-\frac{4}{14}\right)=\left(-\frac{5}{14}\right)$

tür. Bu iki sonuç eşit olmadığından

$$\frac{2}{7}-\left(-\frac{1}{14}\right)\neq\left(-\frac{1}{14}\right)-\frac{2}{7}$$

yazılır. Şu halde :

Rasyonel sayılar kümesinde çıkarma işleminin değişme özeliği yoktur.

c) Birleşme Özeliği

Örnekler :

1. $15-12-8=?$ işlemini yapınız.

$$a-b=a+(-b)$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre,

$$15-12-8=\underbrace{15+(-12)}_{(+3)}+(-8)$$

$$+(-8)=(-5)$$

bulunur.

2. $5-(8-12)=?$; $(5-8)-12=?$

işlemlerini yapınız.

$8-12=8+(-12)=(-4)$; $5-8=5+(-8)=(-3)$

olduğundan, verilen işlemler :

$5-(8-12)=5-(-4)=5+4=9$;

$(5-8)-12=(-3)-12=(-3)+(-12)=(-15)$

olur. Bu iki sonuç eşit olmadığından,

$$5-(8-12)\neq(5-8)-12$$

yazılır. Şu halde :

Rasyonel sayılar kümesinde, çıkarma işleminin birleşme özeliği yoktur.

3. Rasyonel Sayıların Sayı Doğrusu Üzerinde Sıralanması

Örnekler :

Sayı doğrusu üzerinde, sözgelimi,

$$-4,\ -1,\ 0,\ +2\frac{1}{2},\ +5,\ +5\frac{2}{3}$$

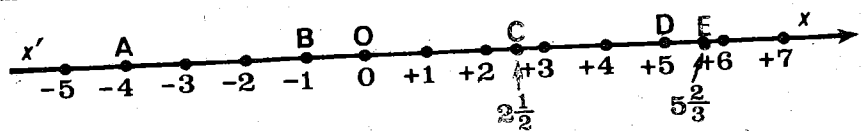
sayıların görüntü noktaları, sıra ile

$$A\ ,\ B\ ,\ O\ ,\ C\ ,\ D\ ,\ E$$

olsun. (41. Şekil). Bu doğru üzerindeki sıralanış biçimine göre,

$$-4 < -1 < 0 < +2\frac{1}{2} < +5 < +5\frac{2}{3}$$

dir.



41. Şekil

Şimdi bu sayıları, ikişer ikişer farklarını alarak karşılaştıralım :

a) $(-4) - (-1) = (-4) + (+1) = (-3) < 0$

dır. Demek ki :

$$(-4) - (-1) < 0 \quad \text{için} \quad -4 < -1$$

ve karşıt olarak,

$$-4 < -1 \quad \text{için} \quad (-4) - (-1) < 0$$

yazılır.

b) $\left(+2\frac{1}{2}\right) - (+5) = \frac{5}{2} + (-5) = \frac{5}{2} + \left(-\frac{10}{2}\right) = \frac{5 + (-10)}{2} = -\frac{5}{2} < 0$

dır. Demek ki

$$\left(+2\frac{1}{2}\right) - (+5) < 0 \quad \text{için} \quad \left(+2\frac{1}{2}\right) < (+5)$$

ve karşıt olarak,

$$\left(+2\frac{1}{2}\right) < (+5) \quad \text{için} \quad \left(+2\frac{1}{2}\right) - (+5) < 0$$

yazılır.

c) $(-4) - \left(+2\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{8}{2}\right) + \left(-\frac{5}{2}\right) = \left(-\frac{13}{2}\right) < 0$

dır. Şu halde :

$$(-4) - \left(+2\frac{1}{2}\right) < 0 \quad \text{için} \quad (-4) < \left(+2\frac{1}{2}\right)$$

ve karşıt olarak,

$$(-4) < \left(+2\frac{1}{2}\right) \quad \text{için} \quad (-4) - \left(+2\frac{1}{2}\right) < 0$$

yazılır.

Genel olarak, **a** ve **b** herhangi iki sayı olduğuna göre,

$$a - b < 0 \quad \text{ise} \quad a < b$$

dir ve karşıt olarak,

$$a < b \quad \text{ise} \quad a - b < 0$$

olur.

ALIŞTIRMALAR

A Grubu :

1. Aşağıdaki çıkarma işlemlerini yapınız. Her birinde, bulduğunuz sonuçlara göre, bu iki sayıdan hangisi daha büyüktür?

a) $(-2) - (+5) = ?$ **b)** $7 - (-7) = ?$

c) $(-5) - (-2) = ?$ **d)** $(-8) - (-13) = ?$

e) $(-23) - (-19) = ?$ **f)** $(-6) - (-1) = ?$

g) $(-11) - (-13) = ?$ **h)** $\left(-\frac{5}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) = ?$

i) $\left(-\frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{7}{2}\right) = ?$ **j)** $\frac{35}{6} - (-3) = ?$

k) $\frac{75}{6} - (-5) = ?$ **l)** $\left(\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = ?$

2. Aşağıdaki eşitlikleri gerçekleyen n sayılarını bulunuz :

a) $(-5)+3=n$; **b)** $(-3)+n=10$;

c) $n+(-4)=11$; **d)** $\left(-\frac{2}{3}\right)+n=\frac{9}{2}$;

e) $n+\frac{4}{5}=\left(-\frac{11}{4}\right)$; **f)** $\left(-\frac{2}{5}\right)-\left(-\frac{1}{10}\right)$

B Grubu :

3. Aşağıdaki işlemleri yapınız :

a) $8-5-7=8+\underbrace{(-5)}_{(+3)}+(-7)$

$+(-7)=(-4)$ tür.

b) $6-8+5=6+(-8)+5$

$=\underbrace{(6+5)}_{11}+(-8)$

$+(-8)=3$ olur.

c) $4+2+(-7)+(-10)=?$

d) $(-2)+5+(-11)+10=?$

e) $(-14)+(-12)+13+19+(-1)=?$

f) $(-14)+(-12)+20+6=?$

g) $12-18-20=?$ **h)** $(-2)-18+5=?$

4. $(x+y+z)$ toplamını, aşağıdaki değerlere göre bulunuz :

a) $x=2$; $y=(-7)$; $z=(-13)$;

b) $x=8$; $y=(-11)$; $z=13$;

c) $x=(-4)$; $y=(-10)$; $z=(-13)$;

d) $x=7$; $y=(-10)$; $z=(-7)$.

5. m ve n iki tamsayıdır. (m—n) yi hesaplayınız.

a) $m=2$ ve $n=(-8)$; **b)** $m=(-4)$ ve $n=9$;

c) $m=23$ ve $n=(-14)$; **d)** $m=-28$ ve $n=19$;

e) $m=0$ ve $n=1$; **f)** $m=18$ ve $n=-27$.

6. Aşağıdaki sayı kümelerinin her birindeki elemanları büyüklük sırasına göre diziniz :

$A=\{1\ ,\ (-2)\ ,\ 4\ ,\ (-3)\ ,\ 7\ ,\ (-9)\ ,\ 0\ ,\ (-8)\}$;

$B=\{0\ ,\ (-4)\ ,\ 4\ ,\ 5\ ,\ (-5)\ ,\ (-2)\ ,\ (-13)\ ,\ 10\}$;

$C=\{3\ ,\ (-1)\ ,\ (-7)\ ,\ (-9),\ 4\ ,\ 2\ ,\ (-3)\ ,\ (-8)\}$.

7. Aşağıdaki işlemleri yapınız :

a) $3+[(-1)-4]=?$ **d)** $7-[4+10+(-3)]=?$

b) $5+[2-(-7)]=?$ **e)** $9-[2+(-5)+(-2)]=?$

c) $8-[9-(-6)]=?$ **f)** $6-[(-5)+10]=?$

Yol gösterme :

Önce köşeli parantez içindeki işlemleri yapınız.

8. Aşağıdaki işlemleri yapınız:

a) $[4+(-5)]-[7+(-2)]=?$

b) $[4+(-1)+(-4)]-(3+7)=?$

c) $[(-1)+(-5)]-[8-(-1)]=?$

d) $[9+(-14)]+[(-2)-(-7)]=?$

1. Aşağıdaki işlemleri yapınız :

a) $\left(-\frac{7}{4}\right)\times\left(+\frac{5}{3}\right)$; **b)** $\left(+\frac{3}{8}\right)\times\left(-1\frac{6}{7}\right)$;

c) $\left(-2\frac{3}{5}\right)\times\left(-7\frac{1}{3}\right)$; **d)** $\left(+\frac{4}{5}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right)$.

2. Tamsayılar için tanımladığımız çarpma işlemine göre aşağıdaki çarpmaları yapınız :

a) $(3\ ;\ 7)\times(5\ ;\ 7)$; **b)** $(1\ ;\ 2)\times(6\ ;\ 5)$

c) $(1\ ;\ 3)\times(2\ ;\ 5)$; **d)** $(6\ ;\ 4)\times(5\ ;\ 1)$

3. Aşağıdaki doğalsayı ikililerine karşılık olan tamsayıları yazdıktan sonra çarpmaları yapınız :

a) $(3\ ;\ 1)\times(5\ ;\ 2)$; **b)** $(6\ ;\ 4)\times(3\ ;\ 0)$;

c) $(12\ ;\ 7)\times(10\ ;\ 3)$; **d)** $(1\ ;\ 5)\times(2\ ;\ 7)$.

Yol gösterme :

$(3\ ;\ \ )\quad(5\ ;\ 2)\equiv(2\ ;\ 0)\times(3\ ;\ 0)$ yazılır.

$(2\ ;\ 0)\longmapsto(+2)$ ve $(3\ ;\ 0)\longmapsto(+3)$ tür. Öyleyse,

$(+2)\times(+3)=(+6)$ olur.

4. Aşağıdaki çıkarma işlemlerini yapınız :

a) $(-7)-(+3)$; b) $(-12)-(-5)$;

c) $(+14)-(-11)$; d) $(-12)-(-7)$;

e) $\left(-3\frac{1}{4}\right)-\left(+1\frac{1}{2}\right)$; f) $\left(-4\frac{1}{4}\right)-\left(+1\frac{1}{7}\right)$;

g) $\left(-\frac{3}{7}\right)-\left(+\frac{5}{21}\right)$; h) $\left(+\frac{7}{4}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)$.

5. Aşağıdaki bölme işlemlerini yapınız :

a) $\left(+\frac{5}{7}\right):\left(-\frac{1}{3}\right)$; b) $(-5):\left(+\frac{2}{3}\right)$;

c) $\left(-\frac{6}{5}\right):\left(+\frac{5}{2}\right)$; d) $\left(-\frac{9}{4}\right):\left(\frac{-3}{2}\right)$;

e) $\left(-1\frac{3}{4}\right):\left(+\frac{4}{5}\right)$; f) $\left(-2\frac{1}{5}\right):\left(-1\frac{2}{3}\right)$

6. Aşağıdaki eşitliklerde x 'in değerini bulunuz.

a) $(-3)\times x=\left(+\frac{1}{2}\right)$; b) $(-4)\times x=\left(-\frac{5}{2}\right)$;

c) $\left(-\frac{3}{4}\right)\times x=\left(+\frac{1}{2}\right)$; d) $\left(+\frac{2}{5}\right)\times x=\left(-\frac{3}{7}\right)$.

7. $\left(-\frac{3}{4}\right)+\Delta=\left(+\frac{5}{4}\right)$

eşitliğinde Δ işaretinin yerine değerini koyunuz.

8. $\left(-\frac{2}{3}\right)\times\Delta=\left(+\frac{5}{3}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)$

eşitliğinde Δ yerine değerini koyunuz.

9. $\left(+\frac{5}{7}\right)\times\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(+\frac{6}{5}\right)\right]=\left[\left(+\frac{5}{7}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\times\Delta$

eşitliğinde Δ işaretinin yerine değerini koyunuz.

B Grubu :

10. Çarpmanın toplama üzerine dağılma özeliğini uygulayarak aşağıdaki işlemleri yapınız :

a) $\left(+\frac{3}{4}\right)\times\left[\left(-7\right)+\left(+\frac{5}{3}\right)\right]$;

b) $\left(\frac{-1}{2}\right)\times\left[\left(-2\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{5}{9}\right)\right]$;

c) $\left(-\frac{7}{2}\right)\times\left[\left(-\frac{4}{3}\right)+\left(+1\frac{2}{7}\right)\right]$;

d) $\left(+1\frac{1}{3}\right)\times\left[\left(+\frac{2}{5}\right)+\left(-\frac{5}{5}\right)\right]$.

11. Aşağıdaki işlemleri çarpmanın çıkarma üzerine dağılma özeliğini uygulayarak yapınız :

a) $(-4)\times\left[(-5)-\left(+\frac{3}{4}\right)\right]$;

b) $\left(+\frac{3}{2}\right)\times\left[\left(-\frac{5}{6}\right)-\left(-\frac{1}{4}\right)\right]$.

12. Aşağıdaki rasyonel sayıları ondalık sayı olarak gösteriniz :

a) $\frac{3}{5}$; b) $\frac{7}{2}$; c) $\frac{5}{6}$;

d) $\frac{7}{12}$; e) $\frac{9}{20}$; f) $\frac{3}{4}$.

13. 0,333 ... ondalık açılımını rasyonel sayı biçiminde yazınız :

Yol gösterme :

$x = 0{,}333\ldots$ ile gösterelim. Bu eşitliğin iki yanı 10 ile çarpılırsa,

$$10\,x = 3{,}333\ldots$$

olur. Bu eşitlik,

$$10\,x = 3 + 0{,}33\ldots$$

olarak yazılır.

$$x = 0{,}33\ldots$$

olduğundan

$$10\ x = 3 + x$$

yazılır. Çıkarmanın tanımına göre,

$$10\ x - x = 3$$

yazılabilir mi? Buradan x'in değerini bulunuz.

14. Aşağıdaki ikilileri yönlü ondalık sayılar olarak gösteriniz :

a) (7,2 ; 3,6) ; **b)** (12,5 ; 17,8) ; **c)** (4,5 ; 4,5)

15. $A = \{-3{,}75\ ;\ +2{,}61\}$, $B = \{-4{,}25\ ,\ 0{,}32\}$ kümeleri veriliyor.

a) $(A \cup B)$ kümesini bulunuz.

b) $(A \cup B)$ kümesinin elemanlarının toplamını bulunuz.

16. $A = \left\{+\frac{3}{5}\ ;\ -\frac{1}{4}\right\}$, $B = \left\{\frac{6}{5}\ ;\ 0{,}02\right\}$

kümeleri verildiğine göre :

a) $(A \cup B)$ kümesini bulunuz.

b) $(A \cup B)$ kümesinin elemanlarının toplamını bulunuz.

17. $A = \left\{-\frac{3}{5}\ ;\ 3{,}75\ ;\ 0{,}361\right\}$ $B = \left\{-\frac{3}{5}\ ;\ 2{,}5\ ;\ 3{,}75\right\}$

kümeleri veriliyor.

a) $(A \cap B)$ kümesini bulunuz.

b) $(A \cap B)$ kümesinin elemanlarının toplamını hesaplayınız.

18. $A = \left\{-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{3}{8}\ ;\ 2{,}75\ ;\ 6{,}031\right\}$

$B = \left\{-\frac{1}{2}\ ;\ 3{,}75\ ;\ 9{,}2\ ;\ 8{,}42\right\}$

$C = \{-0{,}354\ ;\ 12{,}34\}$

kümeleri veriliyor :

a) $(A \cap B)$ kümesini bulunuz.

b) $(A \cap B) \cup C$ kümesinin elemanlarının toplamını hesaplayınız.

c) $(A \cup B) \cap C$ " " " "

C Grubu :

19. $2{,}375 + 13{,}4 + \ldots = 5{,}604$

eşitliğinde noktalarla gösterilen yere hangi sayıyı koymalıdır?

20. $4{,}5 + 12{,}09 + \ldots = 25{,}17$

eşitliğinde noktalarla gösterilen yere hangi sayıyı koymalıdır?

21. $\frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right) + \ldots = \frac{5}{2}$

eşitliğinde noktalarla gösterilen yere hangi sayıyı koymalıdır?

22. $\frac{5}{4} + (-3{,}751) + \ldots = \frac{9}{20}$

eşitliğinde noktalarla gösterilen yere hangi sayıyı koymalıdır?

23. $A = \left\{\frac{1}{2}\ ;\ 3{,}41^{\bullet}\ ;\ -2{,}36\right\}$;

$B = \left\{+\frac{1}{2}\ ;\ 3{,}41\ ;\ -0{,}375\right\}$;

$C = \{0{,}5\ ;\ -2{,}31\ ;\ 3{,}41\ ;\ 7{,}63\}$;

kümeleri veriliyor.

a) $A \cap B \cap C$ kümesini bulunuz.

b) $(A \cap C) \cup B$ kümesini bulunuz.

24. Aşağıdaki işlemleri iki ayrı şekilde yaparak bulduğunuz sonuçları karşılaştırınız :

a) $512{,}7 - (57{,}25 - 43{,}5)$;

b) $47 - (4{,}509 - 3{,}7)$.

25. Aşağıdaki işlemleri en kısa yoldan yapınız :

a) $17{,}8 \times 0{,}9$; **b)** $17{,}8 \times 0{,}99$; **c)** $17{,}8 \times 0{,}999$.

26. Aşağıdaki işlemleri en kısa yoldan yapınız :

a) $3{,}47 \times 20$; **b)** $3{,}47 \times 200$; **c)** $3{,}47 \times 2\ 000$.

d) $846 : 20$; **e)** $846 : 200$; **f)** $846 : 2\ 000$.

Yol gösterme :

a) $3{,}47 \times 20 = 3{,}47 \times 10 \times 2 = 34{,}7 \times 2 = 69{,}4$

e) $846 : 200 = 8{,}46 : 2 = 4{,}23$ olur.

Ötekileri de aynı şekilde yapınız.

Bir sayıyı 20, 200, 2 000 ile kolay çarpma ve bölme kurallarını söyleyiniz.

27. Aşağıdaki işlemleri en kısa yoldan yapınız; sonra, bir sayıyı 5, 50, 500 ile kolay çarpma ve bölme kurallarını söyleyiniz.

a) $34{,}6 \times 5$; b) $2{,}64 \times 50$;

c) $0{,}314 \times 500$; d) $34{,}6 \times 50$;

e) $644 : 50$; f) $8{,}125 : 500$.

Yol gösterme :

a) $(34{,}6 \times 5) \times 2 = 34{,}6 \times 10 = 346 \Longrightarrow 34{,}6 \times 5 = 346 : 2 = 173$

olduğuna dikkat ediniz. Şu halde bir sayıyı 5 ile çarpmak için bu sayı 10 ile çarpılır ve sonuç 2 ye bölünür.

b) $2{,}64 \times 50 = 264 : 2 = 123$ olur.

c) $644 : 50 = 6{,}44 \times 2 = 12{,}88$ dir.

28. Aşağıdaki işlemleri en kısa yoldan yapınız; sonra, bir sayıyı 0,5 ; 0,05 ; 0,005 ile kolay çarpma ve bölme kurallarını söyleyiniz :

a) $24{,}6 \times 0{,}5$; b) $348 \times 0{,}05$;

c) $18{,}2 \times 0{,}005$; d) $34{,}2 : 0{,}5$;

e) $4{,}12 : 0{,}05$; f) $10{,}5 : 0{,}005$.

Yol gösterme :

a) $24{,}6 \times 0{,}5 = 2{,}46 \times 5 = 24{,}6 : 2 = 12{,}3$

b) $348 \times 0{,}05 = 3{,}48 \times 5 = 34{,}8 : 2 = 348 : 20 = 17{,}4$

tür. Demek ki:

Bir sayıyı 0,5 ; 0,05 ; 0,005 ile çarpmak için bu sayıyı 2 ; 20 ; 200 ile bölmek yeter.

f) $10{,}5 : 0{,}005 = 10{,}5 \times 200 = 1\ 050 \times 2 = 2\ 100$

dür. Buna göre :

Bir sayıyı 0,5 ; 0,05 ; 0,005 ile bölmek için, bu sayıyı 2 ; 20 ; 200 ile çarpmak yeter.

KENDİMİZİ DENEYELİM

TEST SORULARI

1. $(3 ; 5) \equiv (4 ; 6) \equiv (7 ; 9) \equiv \ldots$

denk ikililerinin en sade biçimi nedir?

☐ a) $(3 ; 5)$; ☐ b) $(4 ; 6)$; ☐ c) $(2 ; 4)$;

☐ d) $(7 ; 9)$ ☐ e) $(0 ; 2)$.

2. Yukarıdaki denk ikililerin belirttiği yönlü sayı şunlardan hangisidir?

☐ a) (-1) ; ☐ b) (-2) ; ☐ c) (-3) ;

☐ d) $(+2)$; ☐ e) Hiçbiri.

3. $(1 ; m) \equiv (2 ; 5)$

denkliğinin doğru olabilmesi için m ye ne değer vermelidir?

☐ a) 1 ; ☐ b) 2 ; ☐ c) 3 ; d) 4 ; ☐ e) 5.

4. $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$ kesirleri veriliyor. Aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?

☐ a) $\frac{2}{3} < \frac{7}{12} < \frac{5}{6}$; ☐ b) $\frac{5}{6} < \frac{2}{3} < \frac{7}{12}$;

☐ c) $\frac{7}{12} < \frac{2}{3} < \frac{5}{6}$; ☐ d) $\frac{2}{3} < \frac{5}{6} < \frac{7}{12}$;

☐ e) $\frac{5}{6} < \frac{7}{12} < \frac{2}{3}$.

5. $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{17}{24}$, $\frac{5}{8}$

kesirlerinden hangisi en büyüktür?

☐ a) $\frac{2}{3}$; ☐ b) $\frac{5}{6}$; ☐ c) $\frac{7}{12}$; ☐ d) $\frac{17}{24}$; ☐ e) $\frac{5}{8}$.

6. Rasyonel sayılar kümesinde çarpma işlemine göre $2\frac{3}{5}$ kesrinin **tersi** olan **eleman** denir?

☐ **a)** $\frac{13}{5}$; ☐ **b)** $2\frac{5}{3}$; ☐ **c)** $\frac{5}{6}$; ☐ **d)** $\frac{6}{5}$; ☐ **e)** $\frac{5}{13}$.

7.
$$F = \frac{3 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 3} + 1$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

☐ **a)** $+1$; ☐ **b)** -1 ; ☐ **c)** 0 ; ☐ **d)** $\frac{1}{2}$; ☐ **e)** 2.

8. Tamsayılar kümesinde tanımlanan toplama işlemine göre aşağıdaki özeliklerden hangisi **yanlıştır?**

☐ **a)** Tamsayılar kümesi toplama işlemine göre **kapalıdır.**
☐ **b)** Toplama işlemine göre **etkisiz eleman** 1 dir.
☐ **c)** Her elemanın toplamaya göre **tersi** vardır.
☐ **d)** Toplama işleminde **değişme özeliği** vardır.
☐ **e)** Toplama işleminde **birleşme özeliği** vardır.

9. Tamsayılar kümesinde tanımlanan çarpma işlemine göre aşağıdaki özeliklerden hangisi **doğrudur?**

☐ **a)** Tamsayılar kümesi çarpma işlemine göre **kapalı** değildir.
☐ **b)** Çarpmaya göre **etkisiz eleman** 0 (sıfır) dır.
☐ **c)** Çarpmanın toplama üzerine **dağılma özeliği** vardır.
☐ **d)** Çarpmada **birleşme özeliği** yoktur.
☐ **e)** Tamsayılar kümesinde her elemanın çarpmaya göre **tersi** vardır.

10. Tamsayılar kümesinde tanımlanan toplama işleminin birleşme özeliğine göre aşağıdaki eşitlikte Δ nın yerine hangi sayıyı koymalıdır?

$$(-3) + (-5) + \Delta = (-3) + (-5) + (-2)$$

☐ **a)** (-3) ; ☐ **b)** (-5) ; ☐ **c)** (-2) ; ☐ **d)** $(+1)$; ☐ **e)** 0.

11. $(-3)(+7) + (-3)(-8) - (-7)(+8) = ?$

işleminin sonucu şunlardan hangisidir?

☐ **a)** 56 ; ☐ **b)** -101 ; ☐ **c)** -56 ; ☐ **d)** -59 ; ☐ **e)** 59.

12. Aşağıdaki rasyonel sayılardan hangisi $\frac{2}{3}$ ile $\frac{5}{6}$ arasındadır?

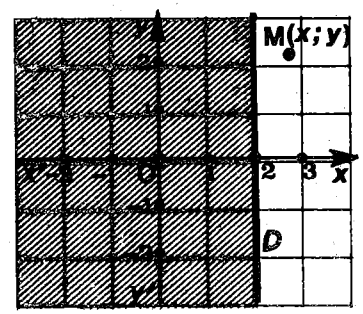
☐ **a)** $\frac{1}{2}$; ☐ **b)** $\frac{7}{12}$; ☐ **c)** $\frac{5}{8}$; ☐ **d)** $\frac{3}{2}$; ☐ **e)** $\frac{3}{4}$.

13. Koordinatlar düzleminde A $(-3\,;2)$ noktasının O **başlangıç noktasına göre simetriği** olan noktanın **koordinatları** aşağıdakilerden hangisidir?

☐ **a)** $(3;2)$; ☐ **b)** $(-3;-2)$; ☐ **c)** $(3;-2)$;
☐ **d)** $(2;-3)$; ☐ **e)** $(-2;3)$.

14. Koordinatlar düzleminde, "42. şekilde" verilen D doğrusunun üzerinde ve sağında bulunan noktaların apsisleri şu bağıntılardan hangisini gerçekler?

☐ **a)** $x < 2$;
☐ **b)** $x = 2$;
☐ **c)** $x \geqslant 2$;
☐ **d)** $x > 2$;
☐ **e)** $x \leqslant 2$.



42. Şekil

15. $y = x + 1$ doğrusunun apsisler eksenini kestiği noktanın **koordinatları** aşağıdakilerden hangisidir?

☐ **a)** $(1;0)$; ☐ **b)** $(-1;1)$; ☐ **c)** $(0;1)$; ☐ **d)** $(-1;0)$; ☐ **e)** $(0;-1)$.

16. $3 - x = -1$ eşitliğini sağlayan x'in değeri nedir?

☐ **a)** 3 ; ☐ **b)** 2 ; ☐ **c)** 4 ; ☐ **d)** 0 ; ☐ **e)** $\frac{1}{2}$.

17.
$$\Delta + \left(-\frac{3}{4}\right) = \left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}$$

eşitliğinden Δ 'nın değeri aşağıdaki özeliklerden hangisine göre bulunur?

☐ **a)** Birleşme özeliği ; ☐ **b)** Değişme özeliği ;
☐ **c)** Ters elemanın özeliği ; ☐ **d)** Simetri özeliği ;
☐ **e)** Etkisiz eleman özeliği.

18. $2x + y - 1 = 0$ doğrusu x'x eksenini hangi noktada keser?

☐ **a)** $(3;0)$; ☐ **b)** $(-1;3)$; ☐ **c)** $\left(\frac{1}{2};0\right)$;

☐ **d)** $(-1;+1)$; ☐ **e)** $\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

19. $(3;4) \times (5;1)$ çarpımı aşağıdaki sayılardan hangisini belirtir?

☐ **a)** $(+2)$; ☐ **b)** (-4); ☐ **c)** $(+3)$; ☐ **d)** (-7); ☐ **e)** $(+5)$

20. $y = x + 1$ doğrusu ile $x = 2$ doğrusunun kesişme noktası, şunlardan hangisidir?

☐ **a)** $(2;3)$; ☐ **b)** $(2;1)$; ☐ **c)** $(3;2)$;

☐ **d)** $(2;2)$; ☐ **e)** Hiçbiri.

3. BÖLÜM — ORAN, ORANTI VE YÜZDELER

Konunun Ayrıntıları

3—1. Oran ve Orantı
3—2. Yüzdeler

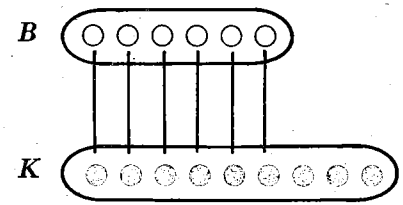
3 — 1. ORAN VE ORANTI

1. Oran Kavramı

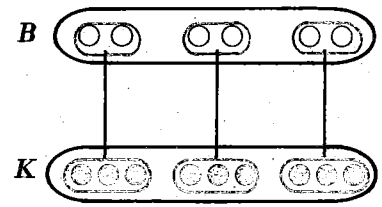
Örnekler :

1. Zafer'in beyaz bilyelerinin kümesi B, kırmızı bilyelerinin kümesi de K olsun (1. şekil). Bu iki kümenin elemanlarını karşılaştıralım.

B kümesinin bir beyaz bilyası ile K kümesinin bir kırmızı bilyasını eşlersek, K kümesinde bilye artar. Öyleyse bu iki kümenin elemanlarını **bire — bir** karşılaştıramayız.



1. Şekil



2. Şekil

Şimdi, B kümesinin elemanlarını ikişerli, K kümesinin elemanlarını da üçerli gruplara ayıralım ve B deki bir grubu, K deki bir grupla eşleyelim. Bu eşlemede, kümelerin hiç birinde eşlenmeyen grup kalmaz (2. şekil).

Buradaki eşleme, B kümesinin elemanları ile K kümesinin elemanları arasında

"2 ye 3"

bir karşılaştırmadır. Başka bir söyleyişle, "B kümesinin her 2 elemanına, K kümesinin 3 elemanı karşı gelir".

İşte, B ve K gibi iki kümenin elemanlarının sayılarının bu tür karşılaştırılması bir **orandır.**

Yukarıdaki örnekte, B nin elemanlarının sayısı ile K nin elemanlarının sayısı arasındaki oran :

"2 ye 3" tür.

Burada 2 sayısı oranın **birinci terimi,** 3 sayısı da **ikinci terimi** dir.

Bir oranda terimlerin yerleri değiştirilirse, oran da değişir.

"2 ye 3" oranı ile "3 'e 2" oranı değişik iki orandır. Başka bir söyleyişle, oranda terimlerin **sırası** önemlidir.

"2 ye 3" oranı, $2 : 3$ ya da $\frac{2}{3}$ biçiminde gösterilir ve

"2 nin 3 'e **oranı**"

diye okunur.

Bu $\frac{2}{3}$ sayısı, 2 'yi elde etmek için, 3 'ü çarpmamız gereken sayıdır. Gerçekten,

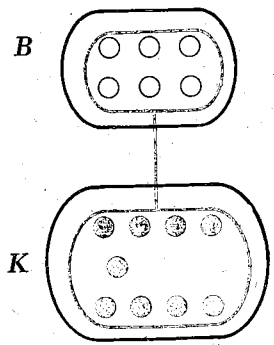
$$3 \times \frac{2}{3} = 2 \quad \text{dir.}$$

"3. şekilde" B kümesindeki beyaz bilyeler bir grup, K kümesindeki kırmızı bilyeler bir tek grup olarak alınmıştır. Bu durumda, B kümesindeki bir gruba, K kümesinde bir grup karşı gelir.

Bu eşleme, B kümesinin elemanları ile K kümesinin elemanları arasında

"6 ya 9"

bir karşılaştırmadır. Başka bir söyleyişle B kümesinin elemanlarının sayısı ile K kümesinin elemanlarının sayısı arasındaki oran,



3. Şekil

"6 ya 9" dur. Bunu da, $6 : 9$ ya da $\frac{6}{9}$ ile gösteririz.

$$\frac{6}{9} = \frac{3 \times 2}{3 \times 3} = \frac{3}{3} \times \frac{2}{3} = 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

olur.

2. Ali 'nin boyu, 1,20 m., Ayşe 'nin boyu 1,50 m. dir. Ali 'nin boyunun Ayşe 'nin boyuna oranı nedir?

Ali ve Ayşe 'nin boyları aynı uzunluk birimi (m.) ile ölçülmüş olduğuna göre, Ali 'nin boyunun Ayşe 'nin boyuna oranı,

"1,2 ye 1,5" dir. Bu da $1,2 : 1,5$ ya da $\frac{1,2}{1,5}$

biçiminde gösterilir.

$$\frac{1,2}{1,5} = \frac{12}{15} = \frac{3 \times 4}{3 \times 5} = \frac{3}{3} \times \frac{4}{5} = 1 \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$$

olur. Öyleyse :

Bir oranın terimleri sıfır olmayan aynı bir sayı ile çarpılırsa, ya da bölünürse oranın değeri değişmez.

3. Akın 'ın ağırlığı 42 kg., Nuray 'ın ağırlığı 35 kg. dır. Akın 'ın ağırlığının Nuray 'ın ağırlığına oranı nedir?

$$42 \text{ kg.} = \frac{42}{35} \times 35 \text{ kg.}$$

dır. Akın 'ın ağırlığının Nuray 'ın ağırlığına oranı $\frac{42}{35}$ tir. Bu sayıyı, şöyle yazarız :

$$\frac{42}{35} = \frac{7 \times 6}{7 \times 5} = \frac{7}{7} \times \frac{6}{5} = 1 \times \frac{6}{5} = \frac{6}{5}$$

Öyleyse, aradığımız oran $\frac{6}{5}$ tir.

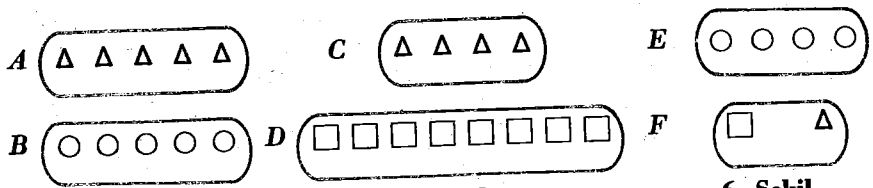
Bu iki ağırlığı grama çevirerek oranlayınız. Ne görüyorsunuz?

Yukardaki örneklerde, iki sayıyı, iki uzunluğu ve iki ağırlığı karşılaştırdık. Bunun gibi, iki alan, iki hacim, iki malın parasal değerleri, ... birbiri ile karşılaştırılabilir. Başka bir söyleyişle, aynı ölçü birimi ile ölçülen nicelikler karşılaştırılabilir. Bir ağırlık ile bir alan karşılaştırılamaz.

Oran, karşılaştırılan niceliklerin ölçü birimlerine bağlı olmayan bir sayıdır.

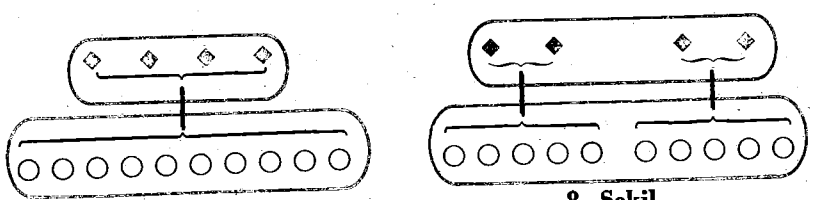
ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki küme çiftlerinin elemanlarının sayılarını karşılaştırınız. Bu sayıların oranlarını yazınız :



4. Şekil 5. Şekil 6. Şekil

2. Aşağıda G ve H kümelerinin elemanları, "7. şekilde" nasıl ve "8. şekilde" nasıl karşılaştırılmıştır? Bu iki karşılaştırmada bulunan oranları yazınız. Bu oranlar eşit midir?



7. Şekil

8. Şekil

3. Aşağıdaki oranları kesir biçiminde yazınız :

a) "3 'e 7" ; **c)** "5 e 8" ; **e)** "9 'a 14"

b) "7 ye 3" ; **d)** "8 e 5" ; **f)** "6 ya 11"

4. Aşağıdaki oranları, en sade kesir biçiminde yazınız.

a) "12" ye 18" ; **b)** "15 'e 25" ; **c)** "10 'a 35)

d) "20 ye 15" ; **e)** "6 'ya 18" ; **f)** "12 ye 9"

5. Bir matematik sınavında 30 test sorusu sorulmuştur. Tuna, bunların 24 ünü doğru olarak yanıtlamıştır. Tuna'nın yanıtladığı soruların sayısının bütün soruların sayısına oranı nedir?

2. Orantı

1 kg. elmanın fiyatı 12 liradır.

1,5 kg. elma için 18 lira,

3 kg. elma için 36 lira

ödeniyor.

1,5 kg. ağırlığın 3 kg. ağırlığa oranı $\frac{1,5}{3} = 0,5$;

18 liranın 36 liraya oranı $\frac{18}{36} = 0,5$

tir. Öyleyse :

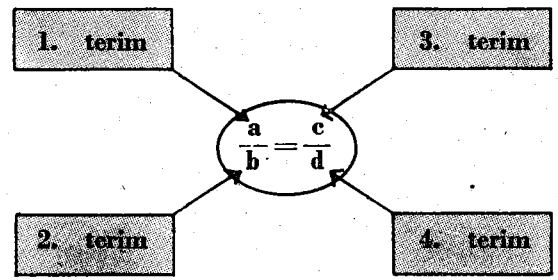
$$\frac{1,5}{3} = \frac{18}{36}$$

olur. İşte böyle iki oranın eşitliğine **orantı** adı verilir.

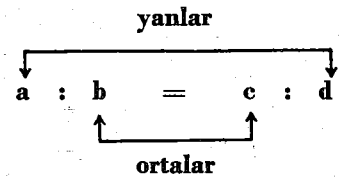
Genel olarak, $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ oranlarının değerleri eşit ise, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ yazılır. Bu eşitlik bir **orantı** dır.

Bu orantıda, "a ve b sayıları c ve d sayıları ile **orantılıdır**" denir.

Bu orantıda, a , b , c , d sayıları bu orantının **terimleri** dir.



Bu orantıyı şöyle yazalım :



Bu orantıda **a** ile **d** ye **yanlar** (ya da **dışlar**), **b** ile **c** ye **ortalar** (ya da **içler**) adı verilir.

3. Orantının Özelikleri

I. 2 ; 5 ; 1,6 ; 4 sayıları arasında bir orantı kurabilir misiniz? Kaç tane buldunuz? Bunlardan biri :

$$\frac{2}{5} = \frac{1,6}{4}$$

tür. Çünkü $\frac{2}{5} = 0,4$ ve $\frac{1,6}{4} = 0,4$ tür. Bu orantıda :

yanların çarpımı : $2 \times 4 = 8$;

ortaların çarpımı : $5 \times 1,6 = 8$

dir. O halde

$$2 \times 4 = 5 \times 1,6$$

yazılır.

Bu eşitlikten hareket ederek, yukardaki orantıyı bulabiliriz.

Gerçekten 2×4 ile $5 \times 1,6$ aynı sayıyı gösteriyorlar. Bu sayıyı (5×4) ile bölelim :

$$\frac{2\times4}{5\times4} = \frac{5 \times 1,6}{5 \times 4} \text{ ya da } \frac{2}{5} = \frac{1,6}{4}$$

bulunur.

Genel olarak,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \times d = b \times c$$

yazılır (*). Bu özelikleri, sözle şöyle anlatırız :

1) Bir orantıda yanların çarpımı ortaların çarpımına eşittir.

2) $a \times d = b \times c$ çarpım eşitliği varsa,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$ **orantısı da vardır.**

* $=$ işareti, sol yandaki bağıntı doğru ise sağ yanın da doğru olduğunu ve sağ yandaki bağıntı doğru ise sol yanın da doğru olduğunu belirtmek için kullanılır.

$3 \times 5 = 15 \iff 15 : 3 = 5$

$10 + 8 = 18 \iff 18 - 8 = 10$

II. $\frac{2}{5} = \frac{1,6}{4}$ orantısını ele alalım.

a) 2 ile 4 'ün yerlerini değiştirelim.

$\frac{4}{5} = 0,8$ ve $\frac{1,6}{2} = 0,8$ olduğundan

$\frac{2}{5} = \frac{1,6}{4} \iff \frac{4}{5} = \frac{1,6}{2}$ yazılır.

Genel olarak,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$

dır. Bunu sözle şöyle anlatırız :

Bir orantıda, yan terimlerin yerleri değiştirilebilir.

b) $\frac{2}{5} = \frac{1,6}{4}$ orantısında 5 ile 1,6 'nın yerlerini değiştirelim.

$\frac{2}{1,6} = 1,25$ ve $\frac{5}{4} = 1,25$ olduğundan

$\frac{2}{5} = \frac{1,6}{4} \iff \frac{2}{1,6} = \frac{5}{4}$ yazılır.

Genel olarak,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff \frac{a}{c} = \frac{d}{b}$$

dir. Bunu sözle şöyle anlatırız :

Bir orantıda orta terimlerin yerleri değiştirilebilir.

Uygulamalar :

1. Aşağıda verilen oran çiftlerinden hangileri arasında orantı kurulabilir?

a) $\frac{12}{14}, \frac{30}{52}$; **b)** $\frac{16}{24}, \frac{6}{9}$.

Çözüm :

a) $\frac{12}{14} = \frac{30}{52} \iff \underbrace{12 \times 52}_{} = \underbrace{14 \times 30}_{}$

$\frac{12}{14} \neq \frac{30}{52} \iff 624 \neq 420$

dir. Öyleyse bu iki oran, bir orantı meydana getirmez.

b) $\frac{16}{24} = \frac{6}{9} \iff \underbrace{16 \times 9}_{} = \underbrace{24 \times 6}_{}$

$\frac{16}{24} = \frac{6}{9} \iff 144 = 144$

tür. Öyleyse, bu iki oran bir orantı oluşturur.

2. $\frac{s}{0,4} = \frac{5,2}{2}$ orantısını sağlayan s sayısını bulunuz.

Çözüm :

Verilen orantıda dışların çarpımı, içlerin çarpımına eşit yazılırsa,

$$2 \times s = 0,4 \times 5,2 \iff 2 \times s = 2,08$$

bulunur. Buradan, bölmenin tanımına göre :

$$s = 2,08 : 2 = 1,04$$

elde edilir.

3. Boyu 180 cm. olan bir adamın gölgesi 2 m. dir. Günün aynı zamanında gölgesinin uzunluğu 8,4 m. olan bir bayrak direğinin yüksekliğini bulunuz.

Çözüm :

Bayrak direğinin yüksekliği h olsun. Problemin anlatımına göre :

$$\frac{2}{1,8} = \frac{8,4}{h}$$

orantısı yazılır. Buradan,

$$2 \times h = 1,8 \times 8,4 \text{ ya da } 2 \times h = 15,12$$

bulunur. Bölmenin tanımına göre de

$$h = 15,12 : 2 = 7,56 \text{ m. olur.}$$

4. Bir otomobil 400 km. yol aldığı zaman 50 lt. benzin yakıyor. Bu otomobil ile 2 800 km. yol alındığı zaman kaç litre benzin yakılır ?

Çözüm :

400 km. den 2 800 km. elde etmek için 400 sayısı 7 ile çarpılır. Öyleyse 50 lt. de 7 ile çarpılarak aradığımız x lt. elde edilir.

alınan yol km.	yakılan benzin lt.
400 → (× 7) → 2 800	50 → (× 7) → x

$$x = 50 \times 7 = 350 \text{ lt.}$$

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıda verilen oran çiftlerinden hangileri arasında orantı kurulabilir?

a) $\frac{36}{33}, \frac{72}{36}$; b) $\frac{20}{6}, \frac{30}{9}$;

c) $\frac{0,8}{1,4}, \frac{4}{7}$; d) $\frac{12}{28}, \frac{28}{49}$.

2. Aşağıdaki orantıları sağlayan s sayılarını bulunuz :

a) $\frac{2}{5} = \frac{s}{10}$; b) $\frac{s}{6} = \frac{4}{20}$; c) $\frac{21}{28} = \frac{6}{s}$;

d) $\frac{21}{s} = \frac{7}{10}$; e) $\frac{15}{35} = \frac{s}{7}$; f) $\frac{s}{8} = \frac{6}{16}$;

g) $\frac{s}{6} = \frac{9}{15}$; h) $\frac{15}{20} = \frac{18}{s}$; i) $\frac{4}{s} = \frac{1}{7}$;

ı) $\frac{20}{8} = \frac{s}{6}$; j) $\frac{s}{12} = \frac{15}{9}$; k) $\frac{9}{24} = \frac{15}{s}$.

3. Bir meyve fidanı, 2 yılda 3 m. büyüyor. 4 yıl sonra bu fidanın kaç metre uzayacağını söyleyebilir misiniz?

(Yol: Ağacın uzaması, zamanla orantılı mıdır?)

4. Bir çocuk 14 yaşında iken 140 cm. dir. Bu çocuk 20 yaşına geldiğinde boyunun kaç cm. olacağını söyleyebilir misiniz?

5. Bir su pompası, 15 dakikada 2,5 ton su çekiyor. Bu pompa 1,5 saat çalışırsa ne kadar su çeker?

6. 5 lt. lik bir kutu döşeme cilâsı ile 60 m^2 yer cilâlanıyor. 5 m. uzunluğunda ve 3 m. genişliğindeki bir odanın döşemesi için ne kadar cilâ gereklidir?

3-2. YÜZDELER

1. Yüzde Kavramı

Örnekler :

1. Ayşe 100 krş. parasının 75 krş.'u ile bir tebrik kartı satın alıyor. Ayşe'nin tebrik kartı için verdiği paranın tüm parasına oranı

$$\frac{75}{100} \text{ dür.}$$

$$\frac{75}{100} = \frac{1}{100} \times 75 = 0{,}01 \times 75$$

tir. $\frac{1}{100}$ ya da 0,01 yerine % işareti kullanılır. Bu işaret, "**yüzde**" diye okunur.

Buna göre $\frac{75}{100}$ oranı :

$$\frac{75}{100} = \frac{1}{100} \times 75 = 0{,}01 \times 75 = \% \ 75$$

biçiminde yazılır. % 75, "**yüzde - yetmişbeş**" diye okunur.

Bu örnekte olduğu gibi, ikinci terimi 100 olan bir orana (ya da **yüzde-birli** bir ondalık sayıya) **yüzde oranı** denir.

2. Bir ortaokulun II-A sınıfında 40 öğrenci var. Bu öğrencilerin 12 tanesi kız öğrencidir. Kız öğrencilerin sayısı, sınıftaki öğrenci sayısının "yüzde-kaçı" olur?

Kız öğrencilerin sayısının, sınıftaki öğrenci sayısına oranı $\frac{12}{40}$ tır. Bu oranı, ikinci terimi 100 olacak biçimde yazmaya çalışalım.

$$\frac{12}{40} = \frac{\cancel{4} \times 3}{\cancel{4} \times 10} = \frac{3}{10} = \frac{3 \times 10}{10 \times 10} = \frac{30}{100} = 0{,}30 = \% \ 30$$

yazılır. Öyleyse, kız öğrencilerin sayısı, sınıftaki tüm öğrenci sayısının % 30 udur.

3. "9. şekilde" taralı bölgenin alanı ile ABCD karesel bölgesinin alanı arasındaki oran :

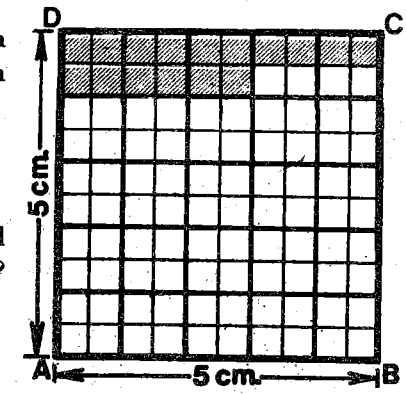
$$\frac{16}{100} = 0{,}16 = \% \ 16 \text{ dır.}$$

Beyaz bölgenin alanı, karesel bölgenin alanının 'yüzde-kaçı" olur?

Bu karesel bölgenin alanı

$$5 \times 5 \ cm^2 = 25 \ cm^2$$

dir. Taralı bölgenin alanı :



9. Şekil

$$\frac{25 \ cm^2 \times 16}{100} = 4 \ cm^2 \text{ ya da } 25 \ cm^2 \times 0{,}16 = 4 \ cm^2 \text{ olur.}$$

Bu 4 cm^2, 25 cm^2 nin "**yüzde-onaltısı**"dır. Öyleyse :

> **Bir sayının yüzdesini bulmak için, bu sayı, yüzde oranı ile çarpılır.**

4. 450 liranın % 5 'i kaç liradır?

$$450 \text{ TL} \times \frac{5}{100} = 450 \text{ TL} \times 0{,}05 = 22{,}5 \text{ TL}$$

bulunur. Burada

450 sayısına,	**temel sayı** ;
% 5 = 0,05 sayısına,	**yüzde oranı** ;
22,5 sayısına da	**yüzde payı**

adı verilir. Bunlardan herhangi ikisi bilinirse öbürü kolayca bulunur.

5. % 6 'sı 24 m. olan ipin tüm uzunluğu kaç m. dir?

İpin uzunluğu T metre olsun.

$$T \times 0{,}06 = 24$$

eşitliği yazılıdır. Çarpmanın ters işlemi olan bölmeye göre,

$$T = 24 : 0{,}06 = 2\,400 : 6 = 400 \text{ m.}$$

bulunur. O halde :

> **Temel sayıyı bulmak için, yüzde payı, yüzde oranına bölünür.**

ALIŞTIRMALAR

A Grubu :

1. Aşağıdaki çizelgede boş gözleri doldurunuz.

Temel Sayı	Yüzde Payı	Yüzde Oranı	Temel Sayı	Yüzde Payı	Yüzde Oranı
4 670 TL	?	%15	?	28 kg.	%4
2 550 TL	?	%5	2 m.	10 cm.	?
?	610 kg.	%25	1 km.	5 m.	?
250 q.	12,5 a.	?	1 t.	8 kg.	?
210 cm.	?	$\%\ 66\frac{2}{3}$	?	27 a.	%9
168 TL	21 TL	?	?	1 200 TL	%6
?	32 cm.	%12,5	?	40	%0,8

2. Aşağıdaki eşitliklerde s nin yerine uygun olan sayıları yazınız.:

a) $\%\ 5 = \frac{1}{100} \times s$; b) $s \times \frac{1}{100} = \%\ 64$;

c) $\frac{6}{40} = \%\ s = \frac{s}{100}$; d) $\%\ 8 = \frac{4}{s}$;

e) $\%\ 12{,}5 = \frac{s}{16}$; f) $\%\ 25 = \frac{75}{s}$;

g) $\frac{s}{100} = \frac{16}{80}$; h) $\%\ 20 = \frac{6}{s}$.

B Grubu :

3. Bir meyve bahçesinde 450 ağaç vardır. Bunların % 4'ü elma, % 20 'si şeftali, % 8 'i kiraz ağacıdır. Geri kalan ağaçlar da değişik meyve ağaçlarıdır.

Bu bahçede bulunan elma, şeftali ve kiraz ağaçlarının sayıları nedir?

4. Aylık geliri 4 800 TL olan bir aile, bu ayhğın % 40 'ını yiyecek için, % 30 'unu ev kirasına, geri kalanı da öbür gereksinmeleri için ayırıyor.

Bu ailenin yiyecek giderini ve ev kirasını hesaplayınız.

5. Su donduğu zaman hacmi % 10 genişler.

a) 385 dm^3 buz eridiği zaman kaç litre su olur?

b) 420 litre su donduğu zaman kaç dm^3 buz olur?

2. Bir Rasyonel Sayının Yüzde Olarak Gösterilmesi

Örnekler :

1. $\frac{3}{4}$ rasyonel sayısını yüzde olarak gösteriniz.

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 25}{4 \times 25} = \frac{75}{100} = \%\ 75$$ olur.

2. $\frac{2}{5}$ rasyonel sayısını yüzde ile gösteriniz.

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \times 20}{5 \times 20} = \frac{40}{100} = \%\ 40$$ olur.

3. $\frac{1}{8}$ rasyonel sayısını yüzde ile gösteriniz.

1. yol : $\frac{2}{8}$ 'nin paydasını 100 yapmak için bu kesri

$100 : 8 = 12{,}5$ ile genişletelim.

$$\frac{1}{8} = \frac{1 \times 12{,}5}{8 \times 12{,}5} = \frac{12{,}5}{100} = \%\ 12{,}5$$ olur.

2. yol : Pay paydaya bölünürse,

$$\frac{1}{8} = 1{,}000 : 8 = 0{,}125 = 0{,}01 \times 12{,}5 = \%\ 12{,}5$$

bulunur. 0,125 ; "**binde-yüzyirmibeş**" tir. **Binde** işareti $‰$ dir. Buna göre

$$\frac{1}{8} = ‰\ 125 = \%\ 12{,}5$$ yazılır.

4. $\frac{3}{2}$ rasyonel sayısını yüzde ile gösteriniz.

1. yol : $\frac{3}{2} = \frac{3 \times 50}{2 \times 50} = \frac{150}{100} = \%\ 150$ olur.

2. yol : Payı paydaya bölelim :

$3 : 2 = 1{,}5 = 0{,}01 \times 150 = \%\ 150$

bulunur.

5. $\frac{1}{3}$ rasyonel sayısını yüzde ile gösteriniz.

$$\frac{1}{3} = \frac{100}{100 \times 3} = \frac{1}{100} \times \frac{100}{3} = \frac{1}{100} \times 33\frac{1}{3} = \%\ 33\frac{1}{3}$$

olur. Bunu, "**yüzde-otuzüç** tam, üçtebir" diye okuruz.

6. $\frac{4}{7}$ rasyonel sayısını yüzde ile gösteriniz.

$$\frac{4}{7} = \frac{100 \times 4}{100 \times 7} = \frac{1}{100} \times \frac{400}{7} = \frac{1}{100} \times 57\frac{1}{7} = \%\ 57\frac{1}{7}$$

olur. Bu, "**yüzde-elliyedi** tam, yedide-bir" diye okunur.

3. Komisyon

Başkası adına mal satan ya da mal alan kimselere **komisyoncu** denir. Komisyoncular, sattıkları ya da satın aldıkları malın bedeli üzerinden belli bir yüzde oranında para alırlar. Komisyoncunun aldığı bu paraya, **komisyon** adı verilir.

Örnek :

Bir kitapçı sattığı kitaplardan % 30 komisyon alıyor. Bu kitapçı, 75 liralık kitap sattığı zaman kaç lira komisyon alır?

Kitapçı, 75 liranın % 30 'unu komisyon olarak alacaktır. O halde bu satıştan alacağı komisyon,

$$75\ \text{TL} \times 0{,}30 = 22{,}5\ \text{TL}\quad \text{dır.}$$

4. İndirim (İskonto)

Bir mal normal satış fiatından daha aşağı bir fiatla satılırsa, bu malın fiatı üzerinde bir **indirim (iskonto)** yapılmıştır. Yapılan indirim **yüzde** ile anlatılır.

Örnek :

Hazır elbise satan bir mağaza, özürlü bir elbiseyi % 32 indirimli olarak 306 liraya satıyor. Bu elbisenin etiket fiyatı nedir?

Elbisenin etiket fiyatından % 32 'si indirilince, geriye, etiket fiyatının

$$\%\ 100 - \%\ 32 = \%\ 68\text{ 'i kalır.}$$

Ohalde % 68 'i 306 lira olan parayı bulacağız. Bu para T lira olsun. Bir sayının % 68'ini bulmak için bu sayıyı 0,68 ile çarparız. Buna göre,

$$T \times 0{,}68 = 306$$

yazılır. Burada bölmenin tanımı uygulanırsa,

$$T = 306 : 0{,}68 = 30\,600 : 68 = 450\ \text{TL}$$

bulunur.

5. Faiz

Bankalar, müşterilerin yatırdıkları paralara karşılık belli bir yüzde oranında kâr verirler ve müşterilerine verdikleri borç paraya karşılık da bir yüzde oranında para alırlar. Bankaların müşterilerine ödedikleri ya da müşterilerinden aldıkları kâr karşılığı olan paraya **faiz** denir. Bir banka % 5 faiz veriyor denildiği zaman şu anlaşılır :

Bu bankaya yatırılan 100 TL, bir yılda 5 lira kâr getirir.

Örnek :

Bir adam 4 000 lira parasını % 9 faiz ile bankaya yatırıyor. Bir yıl sonunda alacağı faiz nedir?

1. **yol:** Adamın alacağı faiz 4 000 liranın % 9 'udur. Bunu bulmak için 4 000 sayısını 0,09 (yüzde-dokuz) ile çarparız. Faizi F ile gösterelim.

$$F = 4\,000\ \text{TL} \times 0{,}09 = 360\ \text{TL}$$

olur.

2. **yol:** 100 lira 9 lira faiz getirirse,
4 000 lira F lira faiz getirir.

Yani 9 lira faizin 100 lira kapitale oranı, F lira faizin 4 000 lira kapitale oranına eşit olur. Buna göre

$$\frac{9}{100} = \frac{F}{4\,000} \quad = \quad 100 \times F = 9 \times 4\,000$$

yazılır. Buradan

$$F = \frac{9 \times 4\,000}{100} = 360\ \text{lira}$$

bulunur.

KARIŞIK ALIŞTIRMA VE PROBLEMLER

A Grubu :

1. Aşağıda verilen oran çiftlerinden hangileri arasında orantı kurulabilir?

a) $\frac{3}{5}, \frac{21}{35}$; b) $\frac{4}{7}, \frac{12}{27}$; c) $\frac{11}{2}, \frac{44}{20}$.

2. Aşağıda verilen orantıları sağlayan x sayılarını bulunuz.

a) $\frac{3}{4}=\frac{x}{8}$; b) $\frac{x}{5}=\frac{7}{3}$; c) $\frac{x}{6}=\frac{7}{4}$;

d) $\frac{5}{6}=\frac{3}{x}$; e) $\frac{0,5}{x}=\frac{3}{4}$; f) $\frac{1,5}{x}=\frac{3}{4}$.

3. Bir otomobile 18 litre benzin konuluyor ve 117 lira ödeniyor. Bu otomobilin deposu 50 litre benzin aldığına göre, depo tam olarak doldurulmuş olsaydı kaç lira ödenirdi?

4. Sesin hızı, saniyede 340 m. dir. Yağmurlu bir havada şimşek çaktıktan 5 saniye sonra gök gürültüsü duyuluyor. Şimşeği meydana getiren bulutların gözlem yerine uzaklığı nedir?

5. Okul kantinine 65 kişilik yemek için 7,8 kg. et alınıyor. Yemek yiyenlerin sayısı 15 kişi daha arttığı zaman kaç kg. et alınır?

6. Bir bahçenin çevresini, 3 sıra dikenli telle çevirmek için 270 m. tel gerekiyor. Bu bahçenin çevresini 5 sıra dikenli telle çevirmek için kaç m. tel gerekir?

B Grubu :

7. Aşağıda verilen sayıları yüzde oranına çeviriniz :

a) $\frac{4}{5}$; b) $\frac{7}{25}$; c) 0,7 ; d) $12\frac{1}{2}$; e) 3,5 .

8. Aşağıda verilen ondalık sayıları yüzde oranına göre yazınız :

a) 0,37 ; b) 0,645 ; c) 3,247.

9. Aşağıdaki yüzde oranlarını ondalık sayıya çeviriniz :

a) % 54 ; b) % 137 ; c) $\%\ 30\frac{1}{4}$; d) % 435 .

10. Aşağıda verilen sayıları yüzde oranına çeviriniz :

a) $\frac{3}{16}$; b) $\frac{1}{125}$; c) 0,475 ; d) 1,77 .

11. Aylık geliri 7 800 TL olan bir aile, iki aylık elektrik için aylık gelirin $\%\ 3\ \frac{5}{6}$'sını veriyor. Bu ailenin iki aylık elektrik gideri nedir?

12. % 5 komisyon alan bir komisyoncu, 690 000 liraya bir ev satıyor. Komisyoncu bu satıştan kaç lira kazanacaktır?

13. 7 200 liraya sattığı buz dolabından 266 lira kazanan bir komisyoncunun, komisyon yüzdesi nedir?

14. Bir adam, arabasını % 5 komisyon vererek bir komisyoncuya sattırıyor. Bu adamın eline 190 000 TL geçtiğine göre, komisyoncu arabayı kaça satmıştır?

C Grubu :

15. Bir adam bankaya vadeli olarak yatırdığı 2 000 lirasının bir yıl sonra 2 180 lira olduğunu görüyor. Bu bankanın verdiği faiz yüzdesini bulunuz.

16. Bir memur, biriktirdiği parayı % 9 faiz veren bir bankaya yatırıyor. Bu memur, 2 yıl sonra 1 260 lira faiz aldığına göre, bankaya kaç lira yatırmıştır?

17. % 6 faiz veren bir bankaya yatırılan 6 400 lira ne kadar zamanda 960 lira faiz getirir?

18. Bir tüccar satın aldığı çamaşır makinesini maloluş fiyatı üzerinden % 25 kârla 8 500 liraya satıyor. Bu çamaşır makinesi tüccara kaç liraya mal olmuştur?

19 Bir tüccar bir yıl sonra ödemek üzere bankadan 48 000 TL borç alıyor. Tüccar bankaya 2 880 TL faiz verdiğine güre, banka yüzde kaç faiz almıştır.

20. Hazır elbise satan bir mağaza, özürlü bir elbiseyi % 40 indirimli olarak 600 liraya satıyor. Bu elbisenin etiket fiyatı nedir?

KENDİMİZİ DENEYELİM

TEST SORULARI

1. $\frac{12}{8}$ ve $\frac{15}{x}$ oranları ile bir orantı oluşturmak için x 'in değeri ne olmalıdır?

☐ 22,5 ; ☐ **b)** 10 ; ☐ **c)** 6,40 ; ☐ **d)** 8 ; ☐ **e)** Hiçbiri.

2. $\frac{7}{16} = \frac{x}{32}$ orantısını sağlayan x 'in değeri nedir?

☐ **a)** 3,5 ; ☐ **b)** 73,14 ; ☐ **c)** 14 ; ☐ **d)** 12 ; ☐ **e)** 11 .

3. $\frac{2}{3}$ oranı aşağıdaki yüzdelerin hangisine eşittir?

☐ **a)** $\%\,60\frac{2}{3}$; ☐ **b)** $\%\,33\frac{2}{3}$; ☐ **c)** $\%\,33\frac{1}{3}$;

☐ **d)** $\%\,66\frac{2}{3}$; ☐ **e)** $\%\,65\frac{1}{3}$.

4. Tolga matematik yazılı sınavında 8 sorudan 6 soruyu doğru olarak yanıtladı. Tolga'nın başarısı yüzde kaçtır?

☐ **a)** % 75 ; ☐ **b)** % 25 ; ☐ **c)** % 36 ;
☐ **d)** % 40 ; ☐ **e)** % 45 .

5. Esin 10 yaşında iken 28 kg., 12 yaşında iken 34 kg. geldiğine göre 20 yaşında kaç kg. olur?

☐ 50 ; ☐ **b)** 48 ; ☐ **c)** 45 ; ☐ **d)** 52 ; ☐ **e)** Hiçbiri.

6. 3 defter için 18 TL ödeniyor. Aynı defterden 8 tane alınırsa kaç TL ödenir?

☐ **a)** 36 ; ☐ **b)** 42 ; ☐ **c)** 48 ; ☐ **d)** 30 ; ☐ **e)** 32 .

7. 52 liraya alınan bir mal 65 liraya satılıyor. Bu satıştan yüzde kaç kâr sağlanmıştır?

☐ **a)** % 80 ; ☐ **b)** % 75 ; ☐ **c)** % 20 ;
☐ **d)** % 25 ; ☐ **e)** % 35 .

8. İndirimli satıştan 85 liralık bir mal 68 liraya satılıyor. Bu satışta yüzde kaç indirim yapılmıştır?

☐ **a)** % 20 ; ☐ **b)** % 80 ; ☐ **c)** % 15 ;
☐ **d)** % 25 ; ☐ **d)** % 30 .

9. Metin'in babası 30 000 liralık savunma tahvili aldı. Savunma tahvili % 11 faiz getirdiğine göre bir yıl sonunda Metin'in babası ne kadar faiz alır?

☐ **a)** 3 000 ; ☐ **b)** 3 300 ; ☐ **c)** 330 ; ☐ **d)** 300 ; ☐ **d)** 400.

10. 2 yılda % 10 dan 60 TL faiz getiren ana para kaç liradır?

☐ **a)** 200 TL ; ☐ **b)** 350 TL ; ☐ **c)** 300 TL ;
☐ **d)** 400 TL ; ☐ **e)** 600 TL .

11. Bir emlâk komisyoncusu bir daire satışından 13 000 TL sı alıyor. Bu komisyoncunun komisyonu % 2 olduğuna göre bu daire kaç liraya satılmıştır?

☐ **a)** 26 000 ; ☐ **b)** 560 000 ; ☐ **c)** 650 000 ;
☐ **d)** 58 000 ☐ **e)** 62 380.

12. Bir kitap % 20 kârla 15 liraya satılıyor. Bu kitabın alış fiyatı nedir?

☐ **a)** 12 TL ; ☐ **b)** 12,5 TL ; ☐ **c)** 14 TL ;
☐ **d)** 13 TL ; ☐ **e)** 16 TL.

13. 480 liraya alınan bir soba % 20 kârla satılıyor. Bu sobanın satış fiyatı nedir?

☐ **a)** 648 ; ☐ **b)** 526 ; ☐ **c)** 586 ; ☐ **d)** 576 ; ☐ **e)** 520.

14. İndirimli satışlardan önce bir pantalonun fiyatı 250 TL idi. İndirimli satışta bu pantalon 210 liraya satıldığına göre yüzde kaç indirim yapılmıştır?

☐ **a)** % 84 ; ☐ **b)** % 18,5 ; ☐ **c)** % 11,9 ;
☐ **d)** % 16 ; ☐ **e)** % 15.

15. $\frac{20}{100} = \frac{1 \times s}{5 \times s}$ orantısında s yerine konulacak sayıyı bulunuz.

☐ **a)** 10 ; ☐ **b)** 12 ; ☐ **c)** 20 ; ☐ **d)** 8 ; ☐ **e)** 4 .

16. Bir oranın indirgenmiş biçimi $\frac{2}{3}$'tür. Bu oranın payı 12 olduğuna göre paydası nedir?

☐ **a)** 10 ; ☐ **b)** 18 ; ☐ **c)** 20 ; ☐ **d)** 9 ; ☐ **e)** 2 .

17. 0,085 ondalık sayısının yüzde oranı nedir?

☐ **a)** % 6 ; ☐ **b)** % 7,5 ; ☐ **c)** % 8,5 ; ☐ **d)** % 12 ; ☐ % 9 ;

18. $\frac{s}{4} = \frac{16}{s}$ orantısında s'nin değeri nedir?

☐ **a)** 3 ; ☐ **b)** 2 ; ☐ **c)** 8 ; ☐ **d)** 4 ; ☐ **e)** 7.

19. $0{,}03 = \frac{1}{100} \times$ s eşitliğini sağlayan s'nin değeri nedir?

☐ **a)** 2 ; ☐ **b)** 3 ; ☐ **c)** 4 ; ☐ **d)** $\frac{3}{2}$; ☐ **e)** 5.

20. $\frac{1}{3}$ rasyonel sayısının yüzde oranı aşağıdakilerden hangisidir?

☐ **a)** % 32 ; ☐ **b)** % 33 ; ☐ **c)** % $33\frac{1}{3}$;

☐ **d)** % $27\frac{1}{2}$; ☐ **e)** % $30\frac{1}{3}$.

4. BÖLÜM
PARALEL DOĞRULAR ÜÇGEN VE PARALELKENAR

Konunun Ayrıntıları

4–1. Bir Düzlemdeki İki Doğru
4–2. Bir Düzlemdeki Üç Doğru
4–3. Paralel Doğrular
4–4. Üçgenler
4–5. Paralelkenar

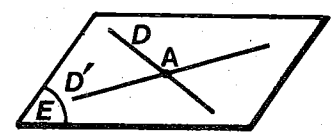
4–1. BİR DÜZLEMDEKİ İKİ DOĞRU

1. Düzlemsel İki Doğrunun Durumları

Birinci sınıftaki derslerimizde, bir düzlem işinde bulunan iki doğrunun birbirine göre üç durumda bulunduğunu görmüştük. Burada, bu durumları kısaca anımsayalım :

a) Kesişen İki Doğru

"1. şekilde" (E) düzleminin içinde bulunan ve bir A noktası ortak olan D ve D' doğruları, **kesişen iki doğrudur.** Bunu, kısaca şöyle anlatırız :



1. Şekil

$D \subset (E)$, $D' \subset (E)$ ve

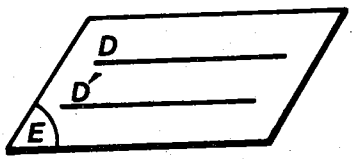
$D \cap D' = \{ A \}$ ise,

D ve D' doğruları A noktasında **kesişir.**

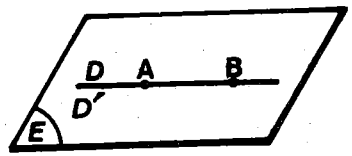
b) Paralel İki Doğru

"2. şekilde" (E) düzleminin içinde bulunan ve kesişmeyen D ve D' doğruları **paralel iki doğrudur.** Bunu kısaca şöyle anlatırız :

$D \subset (E)$, $D' \subset (E)$ ve $D \cap D' = \emptyset$ ise, $D \parallel D'$ dür.



2. şekil



3. şekil

c) Çakışık İki Doğru

"3. şekilde" (E) düzleminin içinde A ve B gibi iki noktası ortak olan D ve D' doğruları, çakışık iki doğrudur. Bu durumu anlatmak için, kısaca

$$D \cap D' = D = D'$$

yazılır.

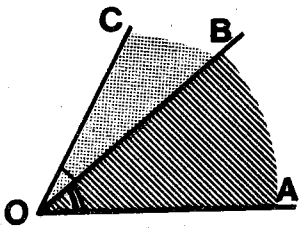
2. Komşu Açılar

"4. şekilde" $\widehat{AOB}$ ve $\widehat{BOC}$ açılarının O köşesi ve [OB kenarı ortaktır. Öbür [OA ve [OC kenarları, ortak kenarın ayrı iki yanındadır.

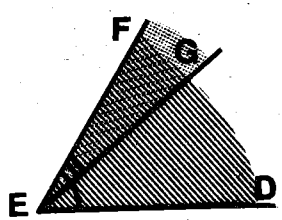
İşte, böyle iki açıya **komşu açılar** denir.

$(\widehat{AOB})$ ve $(\widehat{BOC})$ açısal bölgeleri de **komşu iki açısal bölgedir.**

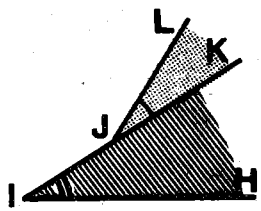
$$(\widehat{AOB}) \cap (\widehat{BOC}) = [OB$$ yazılır.



4. şekil



5. şekil



6. şekil

"5. şekilde" $(\widehat{FEG}) \subset (\widehat{DEF})$ dir ve

$$(\widehat{DEF}) \cap (\widehat{FEG}) = (\widehat{FEG})$$

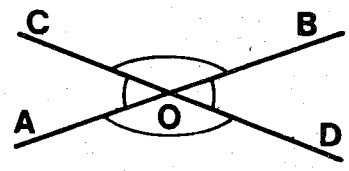
yazılır. Bu iki açısal bölge birbirine komşu mudur?

"6. şekilde" görülen $(\widehat{HIK})$ ve $(\widehat{KJL})$ açısal bölgeleri niçin **komşu değildir?**

3. Komşu ve Bütünler Açısal Bölgeler

"7. şekilde" O noktasında kesişen AB ve CD doğruları verilmiştir.

Başlangıç noktası O olan ışınları söyleyiniz. Bu ışınların oluşturduğu açıları ve açısal bölgeleri belirtiniz.



7. Şekil

$(\widehat{AOC})$ ve $(\widehat{COB})$ açısal bölgelerinin ortak kenarı hangi ışındır? Bu iki açısal bölgenin ortak olmayan [OA ve [OB kenarlarının **birleşimi** AB doğrusudur.

$(\widehat{AOB})$ düz açısal bölgesinin ölçümü kaç derecedir?

$$s(\widehat{AOC}) + s(\widehat{COB}) = s(\widehat{AOB}) = 180°$$

yazılabilir mi?

İşte bu $(\widehat{AOC})$ ve $(\widehat{COB})$ açısal bölgelerine **komşu ve bütünler açısal bölgeler** adı verilir.

"7. şekilde" ikişer ikişer komşu ve bütünler olan açısal bölgeleri söyleyiniz. $s(\widehat{AOC}) = 70°$ olarak alınırsa, öbür açısal bölgelerin ölçümleri ne olur?

30°, 45°, 55°, 90°, 120° lik açısal bölgeleri iletki yardımıyle çiziniz ve içlerini boyayınız. Bunların bütünleri olan açısal bölgeler kaçar derecedir?

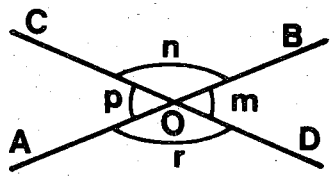
Bu açısal bölgelerin **komşu** ve **bütünleri** olan açısal bölgeleri şekille gösteriniz.

4. Tersaçısal Bölgeler

"8. şekilde" O noktasında kesişen AB ve CD doğrularının meydana getirdiği açısal bölgelerden :

$(\widehat{AOC})$ ile $(\widehat{BOD})$ **ters iki açısal bölgedir.**

$(\widehat{COB})$ ile $(\widehat{AOD})$ nasıl iki açısal bölgedir?



8. Şekil

Bu açısal bölgelerin ölçümleri, içlerine yazılan küçük harflerle gösterilmiştir.

$$\left.\begin{matrix} m + n = 180° \\ p + n = 180° \end{matrix}\right\} \Longrightarrow m + n = p + n$$

yazılabilir mi?

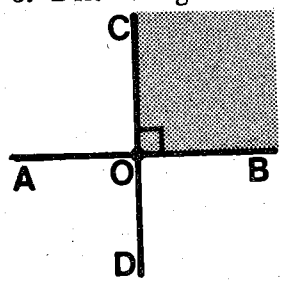
$$m + n = p + n \qquad \text{eşitliğinden}$$

$$m = p$$

olduğunu yazabilir misiniz? Öyleyse :

Tersaçısal bölgelerin ölçümleri birbirine eşittir.

5. Dik Doğrular



9. Şekil

"9. şekilde" görülen AB ve CD doğruları, O noktasında kesişiyor.

$$s(\widehat{AOC}) = 90°$$

ise, öbür açısal bölgelerin ölçümleri ne olur? Bu durumda AB ve CD birbirine **dik iki doğrudur.** Bu diklik,

$$AB \perp CD$$

ile gösterilir. $\perp$, **diklik işaretidir.**

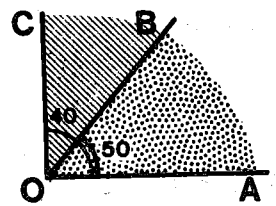
"10. şekilde" verilen $(\widehat{AOB})$ ve $(\widehat{BOC})$ açısal bölgelerinin ölçümlerini toplayınız. Ne buldunuz?

$$[OA \perp [OC$$

yazılabilir mi?

Ölçümlerinin toplamı 90° olan iki açısal bölge, **tümler iki açısal bölgedir.**

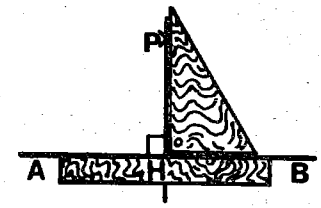
0° , 30° , 45° , 70° , 90° lik açısal bölgelerin tümleri olan açısal bölgeler kaçar derecedir?



10. Şekil

6. Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı

"11. şekilde" bir P noktasından AB doğrusuna gönye yardımıyle dikmenin nasıl çizildiğini görüyorsunuz. [PH] doğru parçasının uzunluğuna, P noktasının AB doğrusuna **uzaklığı** denir. Bu uzaklık |PH| ile gösterilir.



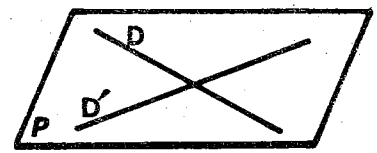
11. Şekil

ALIŞTIRMALAR

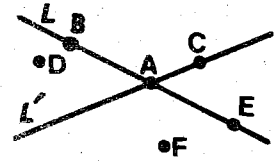
A Grubu :

1. "12. şekle" göre aşağıdaki bağıntılardan doğru olanların solundaki kutuya D, yanlış olanlara da Y yazınız.

☐ **a)** $D \subset (P)$; ☐ **b)** $D \subset D'$; ☐ **c)** $D' \subset D$;
☐ **d)** $D' = (P)$; ☐ **e)** $D' \subset (P)$; ☐ **f)** $(P) \subset D$.



12. Şekil



13. Şekil

2. Defter kâğıdının düzleminde L ve L' doğruları ile çeşitli A, B, C, D, E, F noktaları veriliyor. (13. şekil).

a) Aşağıda "..." ile gösterilen yerlere $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$ işaretlerinden uygun olanları yazınız ?

A ... L ; A ... L' ; E ... L ; B ... L ;
F ... L ; F ... L' ; C ... L' ; D ... L' ;
{A,B} ... L ; {A,C} ... L' ; {A,B} ... {B, E, A}.

b) $L \cap L'$ kesişim kümesini elemanı ile belirtiniz.

3. a) Kesişen D ve D' doğrularını çiziniz.

b) $\{A\} = D \cap D'$ olacak şekilde bir A noktası alınız.

c) $\{B, C\} \subset D$ olacak biçimde B ve C noktalarını alınız.

d) BC doğrusu ile D doğrusu ne durumdadır? $BC \cap D$ ve $BC \cap D'$ kümelerini belirtiniz.

4. $s(\widehat{AOB}) = 35°$ ve $s(\widehat{BOC}) = 55°$ olacak biçimde iki komşu açı çiziniz.

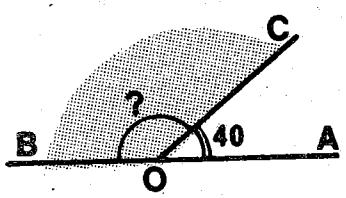
$$(\widehat{AOB}) \cup (\widehat{BOC}) = (\widehat{AOC})$$

yazılabilir mi? $s(\widehat{AOC})$ kaç derecedir?

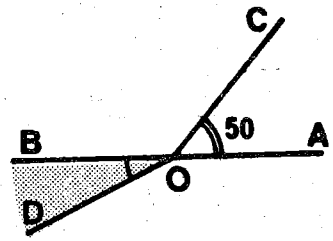
B Grubu :

5. "14. şekle" göre aşağıdaki eşitliği tamamlayınız :

$$s(\widehat{BOC}) = \ldots$$



14. Şekil



15. Şekil

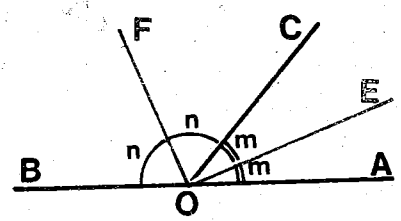
6. "15. şekilde" AB doğrusu ile [OC ve [OD ışınları veriliyor.

a) $(\widehat{AOC})$ açısal bölgesinin komşu ve bütünleri olan açısal bölge hangisidir ve bunun ölçümü nedir?

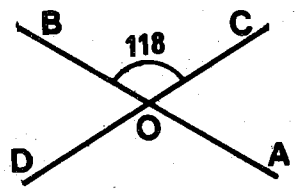
b) $(\widehat{AOC})$ ve $(\widehat{BOD})$ niçin iki **tersaçısal bölge** değildir?

7. "16. şekilde" AB bir doğru $O \in AB$, $(\widehat{AOC})$ ve $(\widehat{COB})$ açısal bölgelerinin açıortayları [OE ve [OF dir. $s(\widehat{AOE}) = m = 25°$ olduğuna göre $(\widehat{EOC})$, $(\widehat{COF})$, $(\widehat{FOB})$ ve $(\widehat{EOF})$ açısal bölgelerinin ölçümlerini bulunuz.

m nin değeri ne olursa olsun, daima, [OE ⊥ [OF olur. Niçin?



16. Şekil



17. Şekil

8. "17. şekle" göre, aşağıdaki eşitlikleri tamamlayınız :

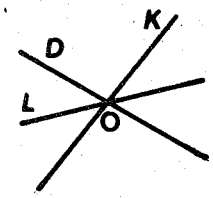
$$s(\widehat{AOC}) = \ldots \; ; \quad s(\widehat{BOD}) = \ldots \; ; \quad s(\widehat{AOD}) = \ldots$$

4-2. BİR DÜZLEMDEKİ ÜÇ DOĞRU

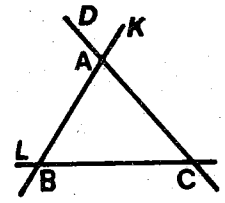
1. Düzlemsel Üç Doğrunun Durumları

Bir düzlem içinde bulunan üç doğru birbirine göre dört durumda bulunurlar :

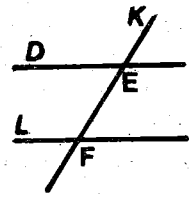
1. **durum :** D , L ve K doğruları bir O noktasından geçerler (18. şekil). Bu durumda doğrulara, **doğrular demeti** adı verilir. O noktası demetin **merkezidir.**



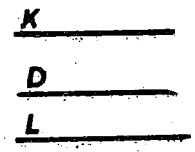
18. Şekil



19. Şekil



20. Şekil



21. Şekil

2. **durum :** K , D , L doğruları, ikişer ikişer A , B , C gibi farklı üç noktada kesişirler (19. şekil).

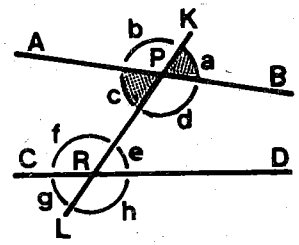
3. **durum :** K , D , L doğrularından yalnız ikisi paraleldir. "20. şekilde", $D//L$ dir ve K doğrusu bu paralelleri E ve F noktalarında kesiyor. Bu durumda K doğrusuna **kesen** adı verilir.

4. **durum :** Doğruların üçü de birbirine paraleldir. $K//D//L$.

2. İki Doğrunun Bir Kesenle Yaptığı Açılar

a) Yöndeş Durumlu Açısal Bölgeler

"22. şekilde" AB ve CD doğruları bir KL keseni ile kesilmiştir. Meydana gelen sekiz açısal bölge, içlerine yazılan küçük harflerle gösterilmiştir. Bunlardan KL keseninin aynı bir yanından bulunan $(\hat{a})$ ve $(\hat{e})$ açısal bölgeleri **yöndeş durumlu iki açısal bölgedir.**



22. Şekil

Bunlar gibi, yöndeş durumlu olan öbür açısal bölge çiftleri şunlardır :

$(\hat{b})$ ile $(\hat{f})$; $(\hat{c})$ ile $(\hat{g})$; $(\hat{d})$ ile $(\hat{h})$.

b) İçters Durumlu Açısal Bölgeler

(c) ile (e) ve (d) ile (f) **içters durumlu açısal bölgelerdir.** Bu açısal bölge çiftleri, KL kesenin ayrı iki yanında ve AB ile CD nin arasındadır; birbirine komşu değildir.

c) Dışters Durumlu Açısal Bölgeler

İçters durumlu iki açısal bölgenin **ters** açısal bölgelerinden oluşan açısal bölge çiftine **dışters durumlu açısal bölgeler** adı verilir.

$(\hat{a})$ ile $(\hat{g})$ ve $(\hat{b})$ ile $(\hat{h})$.

ALIŞTIRMALAR

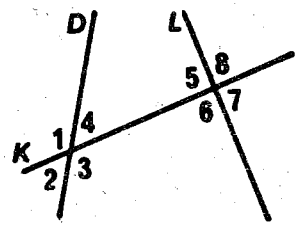
1. "23. şekilde" verilen sekiz açısal bölgeden :

$(\hat{1})$ ile $(\hat{5})$ yöndeş durumlu;

$(\hat{3})$ ile $(\hat{5})$ içters durumlu;

$(\hat{1})$ ile $(\hat{7})$ dışters durumlu

açısal bölgelerdir. Öbür, yöndeş durumlu, içters durumlu ve dışters durumlu açısal bölge çiftlerini belirtiniz.



23. Şekil

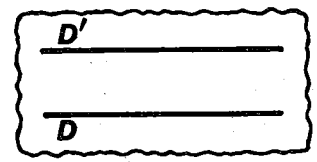
2. Bir açı çiziniz ve bunun kenarlarını bir kesenle kesiniz. Meydana gelen yöndeş, içters ve dışters durumlu açısal bölgeleri belirtiniz.

4–3. PARALEL DOĞRULAR

1. Paralellik Kavramı

"24. şekilde" görülen D ve D' doğruları bir defter kağıdına çizilmiştir. Bu doğrulardan her biri bir noktalar kümesidir. Bu iki kümenin kesişimi

$$D \cap D' = \{\ \}$$



24. Şekil

dir. Böylece iki doğruya **paralel doğrular** denir (*). Demek ki iki doğrunun birbirine paralel olması için aşağıdaki iki koşulun gerçeklenmesi gerekir :

1) Doğrular bir düzlem içindedir.

2) Doğruların ortak noktası yoktur.

D ve D' doğrularının paralelliği $D//D'$ biçiminde gösterilir. // **paralellik** işaretidir.

2. Paralel İki Doğrunun Bir Kesenle Yaptığı Açılar

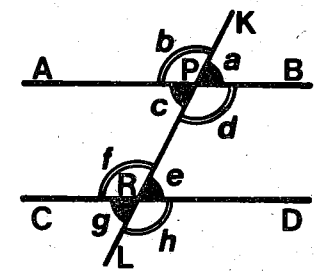
"25. şekilde" iki paralel doğrunun bir kesenle kesildiğini görüyorsunuz. Meydana gelen açılar şöyle adlandırılır :

1) $(\hat{a})$ ile $(\hat{e})$; $(\hat{b})$ ile $(\hat{f})$; $(\hat{c})$ ile $(\hat{g})$;

$(\hat{d})$ ile $(\hat{h})$ açısal bölgeleri, **yöndeş açısal bölgelerdir.**

2) $(\hat{c})$ ile $(\hat{e})$; $(\hat{d})$ ile $(\hat{f})$ **içters açısal bölgelerdir;**

3) $(\hat{a})$ ile $(\hat{g})$; $(\hat{b})$ ile $(\hat{h})$ **dışters açısal bölgelerdir.**



25. Şekil

Göstergen bir kâğıdı $(\hat{a})$ açısal bölgesinin üzerine koyarak kopyasını çıkarınız. Sonra bu kâğıdı $(\hat{e})$ nin üzerine koyunuz. Ne gördünüz? Bu $(\hat{a})$ ve $(\hat{e})$ yöndeş açısal bölgelerini bir de ölçerek karşılaştırınız.

$$s(\hat{a}) = s(\hat{e})$$

yazabilir misiniz? Aynı denemeyi $(\hat{b})$ ve $(\hat{f})$ açısal bölgeleri için yapınız. Bunların ölçümlerinin de eşit olduğunu göreceksiniz. Öyleyse yöndeş açılarla ilgili aşağıdaki özeliği söyleyebiliriz :

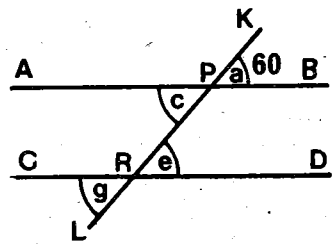
* Bölümün başında, paralel iki doğru kısaca tanıtılmıştı. Burada, konunun gereği ve öneminde ötürü tanım yeniden verildi.

Paralel iki doğru bir doğru ile kesilirse, meydana gelen yöndeş açılar eştir.

"26. şekilde" AB//CD dir. Bu paralel doğrular, KL doğrusu ile kesilmiştir. $s(\hat{a}) = 60°$ dir.

$s(\hat{c}) = ?$, $s(\hat{e}) = ?$

Buna göre, $\hat{c}$ ve $\hat{e}$ açıları eş açılar mıdır? Öyleyse,



26. Şekil

Paralel iki doğru bir doğru ile kesilirse, meydana gelen iters açılar eştir.

Şekilde görülen $\hat{a}$ ve $\hat{g}$ açıları nasıl açılardır?

$$s(\hat{g}) = s(\hat{e}) = 60°$$

yazılabilir mi? Buna göre, $\hat{a}$ ve $\hat{g}$ açıları birbirine eş midir?

Bu iki açının eşliğini, yukarıdaki anlatıma benzer bir biçimde söyleyiniz.

3. Önermeler

Örnekler :

1. Ankara Türkiye'nin başkentidir.
2. İstanbul Türkiye'nin en kalabalık kentidir.
3. $5 = 3 + 2$ dir.
4. Sivas Türkiye'nin batısındadır.
5. $5 > 7$ dir.
6. Bugün top oynayalım.
7. Tuna sinemaya git.

Yukarıda verilen ilk beş tümcenin her biri bir yargıyı anlatıyor. Sözgelişi,

"İstanbul Türkiye'nin en kalabalık kentidir" dediğimiz zaman, İstanbul'da öbür kentlerimizden daha çok insanın yaşadığını anlatan bir **yargıyı** belirtmiş oluyoruz.

Bu **yargı, doğru** olan bir yargıdır.

"Sivas, Türkiye'nin batısındadır" dediğimiz zaman da yine bir yargıyı belirtmiş oluruz; ama bu **yargı, yanlış** bir yargıdır.

Yukarıda verdiğimiz 6. tümce, bir isteği ortaya koyuyor. 7. tümce de bir emri anlatıyor. Bu bakımdan, bu iki tümcede yargı fikri yoktur.

Kesin olarak doğru ya da yanlış olan bir yargıyı anlatan her tümce bir önermedir.

Matematikteki her anlatım bir önermedir. Sözgelimi,

$9 = 3 + 6$	**doğru** bir **önerme,**
$4 > 5$	**yanlış** bir **önermedir.**

"İki noktadan yalnız bir doğru geçer" önermesi doğru bir önermedir.

$$\underbrace{\text{Yağmur yağıyor}}_{\text{varsayım}} \quad \textbf{ise} \quad \underbrace{\text{yerler ıslanır}}_{\text{yargı}}$$

önermesini alalım. Bu önerme **ise** bağlacı ile iki parçaya ayrılmıştır.

"**Yağmur yağıyor**" önermesi, verilen önermenin **varsayımıdır.**

"**Yerler ıslanır**" önermesi de verilen önermenin **yargısıdır.**

Bunun gibi,

$$\underbrace{\left\{\begin{matrix}\text{Paralel iki doğru}\\ \text{bir doğru ile kesiliyor}\end{matrix}\right\}}_{\text{varsayım}} \quad \textbf{ise} \quad \underbrace{\left\{\begin{matrix}\text{meydana gelen}\\ \text{yöndeş açılar eştir}\end{matrix}\right\}}_{\text{yargı}}$$

önermesi de varsayım ve yargı olarak iki parçadan oluşmuştur.

Geometride tüm özelikler, böyle **varsayım** ve **yargıyı** anlatan iki parçadan oluşurlar. Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz :

Varsayım:		Yargı:
$\hat{a}$ ve $\hat{c}$ ters iki açı	ise	$\hat{a} \cong \hat{c}$ dir.
$s(\hat{a}) = 60°$ ve $s(\hat{b}) = 120°$	ise	$\hat{a}$ ile $\hat{b}$ bütünler iki açıdır.
$\hat{A}$ açısı dik açı	ise	$s(\hat{A}) = 90°$ dir.

4. Karşıt Önermeler

Örnekler :

1. (a) : Akın, Sami'nin oğlu ise Sami, Akın'ın babasıdır

varsayım yargı

önermesini alalım. Bu önermenin varsayımını, yargı ve yargısını da varsayım yaparak aşağıdaki önermeyi yazalım :

(b) : Sami, Akın'ın babası ise Akın, Sami'nin oğludur.

varsayım yargı

Bu (b) önermesi, (a) önermesinin **karşıtıdır.**

Burada (a) önermesi de (b) önermesinin **karşıtı** olur.

(a) önermesinin doğru bir önerme olduğunu biliyoruz. Bu durumda (b) önermesi de doğru bir önermedir.

2. (c) : Yağmur yağıyor ise yerler ıslanır ;
önermesinin karşıtı :

(d) : Yerler ıslanır ise yağmur yağıyor ;
biçiminde söylenir.

(c), doğru bir önerme olduğu halde, bunun karşıtı olan (d) önermesi neden doğru değildir?

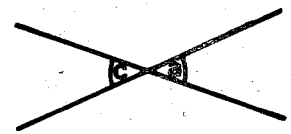
3. (e) : $\hat{a}$ ve $\hat{c}$ ters iki açı ise $\hat{a} \cong \hat{c}$ dir (27. şekil).

Bu önermenin karşıtı şudur :

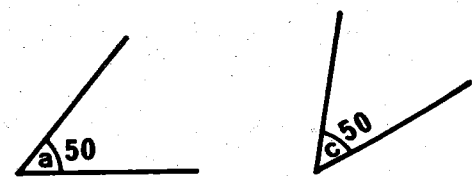
(f) : $\hat{a} \cong \hat{c}$ ise $\hat{a}$ ve $\hat{c}$ ters iki açıdır.

(e) önermesi doğru olduğu halde, karşıt önermenin yanlış olduğu "28. şekilde" açıkça görülüyor.

(e) önermesi (f) önermesi



27. Şekil



28. Şekil

Bu incelediğimiz örneklerden anlaşılıyor ki, bir önerme doğru olduğu halde, karşıtı her zaman doğru değildir.

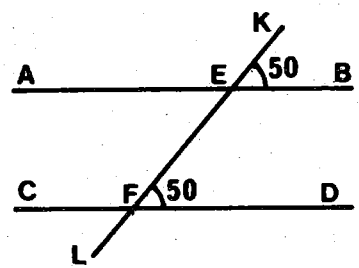
4. (a) : { Paralel iki doğru / bir doğru ile kesiliyor } ise { meydana gelen / yöndeş açılar eştir }

önermesinin karşıtı şudur :

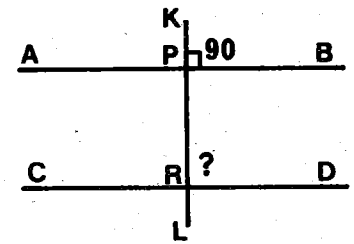
(b) : { İki doğru bir doğru ile / kesiliyor ve meydana gelen / yöndeş durumlu iki açı eş } ise { bu iki / doğru / paraleldir. }

Burada, (a) önermesi doğru olduğu gibi, bunun karşıtı olan (b) önermesi de doğrudur.

"29. şekilde" görülen AB ve CD doğruları neden paraleldir?



29. Şekil



30. Şekil

"30. şekilde" AB//CD ve KL ⊥ AB veriliyor.
Neden KL ⊥ CD olur? Öyleyse :

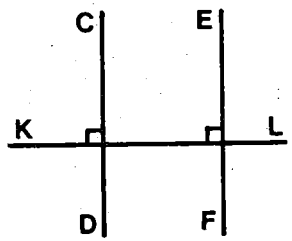
Paralel iki doğrudan birine dik olan doğru öbürüne de diktir.

ALIŞTIRMALAR

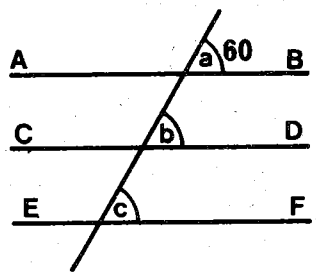
A Grubu :

1. "31. şekle" göre neden CD//EF olur? Öyleyse :

Bir doğruya dik olan iki doğru birbirine paraleldir.



31. Şekil



32. Şekil

2. "32. şekilde" AB//EF ve CD//EF olarak veriliyor. Neden AB//CD olur?

Yol gösterme :

Bu üç doğruyu bir KL doğrusu ile kesiniz. Meydana gelen yöndeş durumlu açıları inceleyiniz.

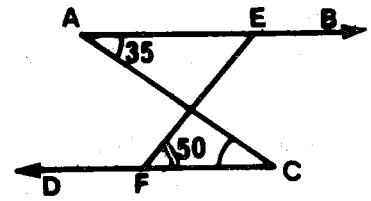
$s(\hat{a}) = 60°$ olsa, neden $s(\hat{c}) = 60°$ olur? $s(\hat{b})$ nin değeri nedir?

$s(\hat{a}) = s(\hat{b})$ olduğu bulunursa, AB//CD yazılabilir mi? Öyleyse :

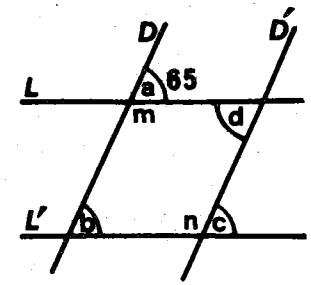
Bir doğruya paralel olan iki doğru birbirine paraleldir.

3. "33. şekilde" [AB // [CD (*), $s(\hat{A}) = 35°$ ve $s(\hat{F}) = 50°$ olduğuna göre, $s(\hat{C})$ ve $s(\hat{E})$ nin değerleri nedir?

* İki ışını taşıyan doğrular paralelse, bu ışınlar paralel sayılır. Bunun gibi, iki doğru parçasını taşıyan doğrular paralelse, bu doğru parçaları da paralel sayılır.



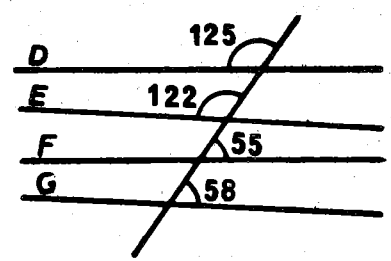
33. Şekil



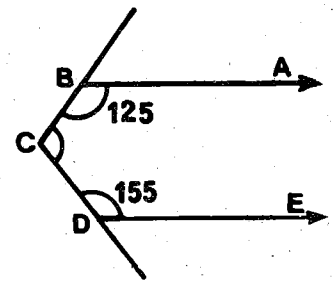
34. Şekil

4. "34. şekilde" $D//D'$ ve $L//L'$ dür. $s(\hat{a}) = 65°$ olduğuna göre, $\hat{b}$, $\hat{c}$, $\hat{d}$, $\hat{m}$, $\hat{n}$ açılarının ölçümlerini hesaplayınız (*).

5. "35. şekilde" verilen açıları inceleyiniz. D , E , F , G doğrularından hangileri paraleldir?



35. Şekil



36. Şekil

B Grubu :

6. "36. şekilde" [BA // [DE dir. C açısının ölçümü kaç derece olur?

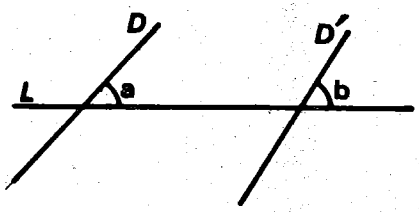
Yol gösterme :

C den [BA ya bir paralel çizerek düşününüz.

7. "37. şekilde" D ve D' doğruları, L doğrusu ile kesilmiştir. Meydana gelen yöndeş durumlu $\hat{a}$ ve $\hat{b}$ açılarının ölçümleri aşağıdaki

* **"Açısal bölgenin ölçümü"** yerine, söyleyiş kolaylığı bakımından, kısaca **"açının ölçümü"** de denilebilir; ama, ölçülen büyüklüğün **"açı"** değil, **"açısal bölge"** olduğunu unutmamak gerekir.

çizelgede değişik olarak verilmiştir. Her durum için ayrı şekil çizerek, D ve D' doğrularının paralel olma ya da kesişme durumlarını çizelgede ilgili göze $\times$ işareti koyarak belirtiniz.



37. Şekil

$s(\widehat{a})$	$s(\widehat{b})$	D ve D' doğruları:		
		Paraleldir.	L nin altında kesişirler.	L nin üstünde kesişirler.
80°	70°			
80°	80°			
85°	90°			
120°	110°			
90°	90°	×		
40°	60°			×

C Grubu :

8. Aşağıdaki önermelerden her zaman doğru olanların soluna D, yanlış olanların soluna da Y yazınız :

a) Bugün 29 Ekim ise Cumhuriyet Bayramı'dır.

b) Tuna okulun birincisi ise Tuna sınıfının birincisidir.

c) K bir kedi ise K nin 4 ayağı vardır.

d) Tuna, Zafer'in kız kardeşi ise Zafer, Tuna'nın erkek kardeşidir.

e) $\widehat{a} \cong \widehat{b}$ ise $\widehat{a}$ ve $\widehat{b}$ iki ters açıdır.

f) İki açı eş ise bu açılar dik açıdır.

g) İki açı tümler ise bu açılar komşudur.

h) $D//D'$ ise $D'//D$ dir.

9. Yukarıdaki önermelerin karşıtlarını yazınız. Bu karşıt önermelerin doğru olup olmadığını belirtiniz.

10. $D \perp L$ ve $L \perp D'$ ise, $D//D'$ olur. Niçin?

4-4. ÜÇGENLER

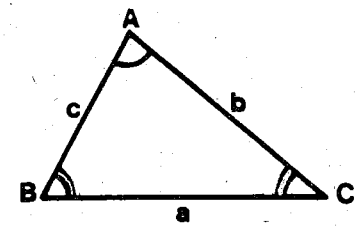
1. Üçgen ve Elemanları

Doğrusal olmayan A, B, C gibi üç noktayı ikişer ikişer birleştiren [AB] , [BC] , [CA] doğru parçalarının birleşimine **üçgen** denildiğini biliyorsunuz. Bu üçgeni $\widehat{ABC}$ şeklinde gösteririz. Buna göre,

$$[AB] \cup [BC] \cup [CA] = \widehat{ABC}$$

yazılır.

A, B, C noktaları üçgenin **köşeleri**, [AB] , [BC] , [CA] doğru parçaları da **kenarlarıdır**.



38. Şekil

Bir köşenin karşısında bulunan kenarın uzunluğunu, o köşedeki harfin küçüğü ile göstereceğiz. Buna göre,

$$|BC| = a \ , \ |CA| = b \ , \ |AB| = c$$

yazılır.

$\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ açılarına üçgenin **iç açıları** denir.

Bir üçgende açı ve kenarlar, bu üçgenin **temel elemanlarıdır.**

2. Kenarlarına Göre Üçgenlerin Çeşitleri

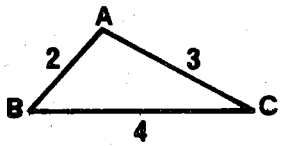
a) Çeşitkenar Üçgen

"39. şekilde" kenarlarının uzunlukları değişik olan bir üçgen görüyorsunuz. Böyle, kenarlarının uzunlukları değişik olan üçgene **çeşitkenar üçgen** denir. "Bir üçgen" denilince, genel olarak çeşitkenar üçgen anlaşılır.

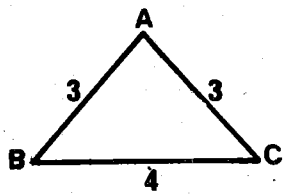
b) İkizkenar Üçgen

İki kenarının uzunluğu eşit olan üçgene **ikizkenar üçgen** adı verilir (40. Şekil).

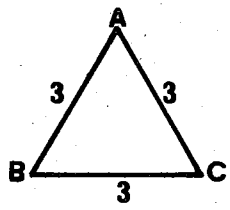
Bir ikizkenar üçgende, uzunlukları eşit olan iki kenara **yanal kenarlar**, bu kenarların birleştiği köşeye **tepe**, tepenin karşısındaki kenara da **taban** adı verilir.



39. Şekil



40. Şekil



41. Şekil

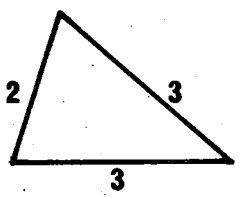
c) Eşkenar Üçgen

Üç kenarının uzunluğu eşit olan üçgene **eşkenar üçgen** denir (41. şekil).

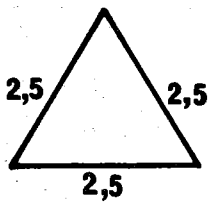
Eşkenar üçgende herhangi iki kenarının uzunluğu eşittir. Bu nedenle, eşkenar üçgen, üç tepesi olan bir ikizkenar üçgendir.

ALIŞTIRMALAR

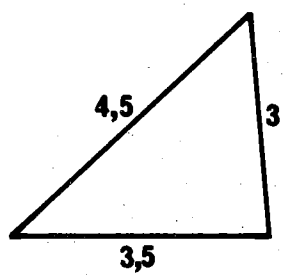
1. "42. şekilde" verilen üçgenlerin türlerini söyleyiniz.



(a)



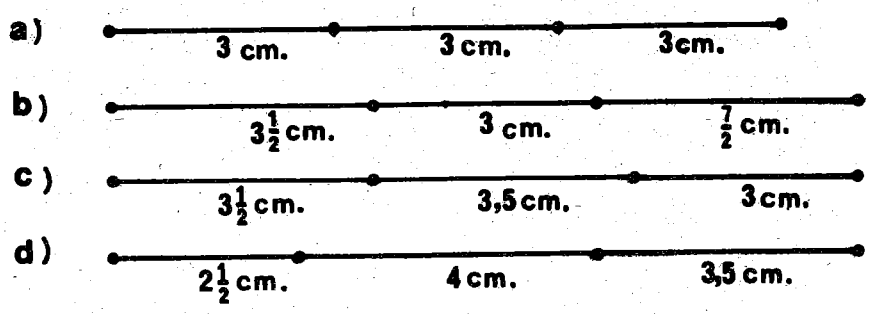
(b)



(c)

42. Şekil

2. "43. şekilde" verilen telleri, işaretli noktalardan, iki ucu biraraya gelecek biçimde bükerek üçgenler yapınız. Elde ettiğiniz üçgenlerin türlerini söyleyiniz.



43. Şekil

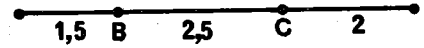
3. Bir $\widehat{ABC}$ üçgeninde kenarların uzunlukları a = 3,5 cm. ; b = 4 cm. ; c = 3 cm. dir. Bu üçgen, nasıl bir üçgendir?

4. Bir ikizkenar üçgenin bir kenarı 3 cm., bir kenarı da 4 cm. dir. Bu ikizkenar üçgenin üçüncü kenarı kaç cm. olabilir?

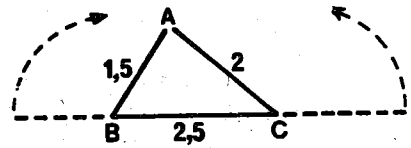
3. Üçgenin Kenarları Arasındaki Bağıntılar

"44. şekilde" verilen tel, üzerinde işaretli B ve C noktalarından bükülerek "45. şekildeki" üçgen elde edilmiştir. Bu üçgenin türünü söyleyiniz.

Bu telin tüm uzunluğu kaç cm. dir? Bu uzunluk, üçgenin çevresidir.



44. Şekil



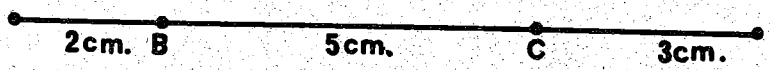
45. Şekil

Bir üçgenin çevresi 2u ile gösterilir.

$$a + b + c = 2u$$

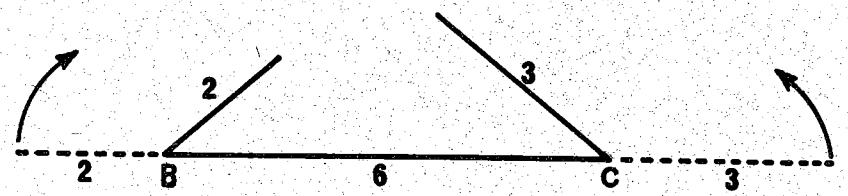
yazılır.

"46. şekildeki" teli, üzerinde işaretli B ve C noktalarından bükerek bir üçgen yapmaya çalışınız. Üçgen meydana geliyor mu?



46. Şekil

"47. şekildeki" teli, üzerinde işaretli B ve C noktalarından bükerek bir üçgen yapmaya çalışınız.



47. Şekil

Üçgenin A köşesi meydana geliyor mu?

Bu iki şekilde de üçgenin meydana getirilememesi nedendir?

Bundan önceki alıştırmada, telleri bükerek elde ettiğiniz herhangi bir üçgenin en uzun kenarını, öbür iki kenarının uzunluklarının toplamı ile karşılaştırınız. Ne buldunuz?

"45. şekilde" $\widehat{ABC}$ üçgeninin kenarlarının uzunlukları arasında

$$a < b + c$$

bağıntısının bulunduğunu sağlayınız.

Her kenar için doğru olan bu özeliği sözle şöyle anlatırız:

Bir üçgende her kenarın uzunluğu öbür iki kenarın uzunlukları toplamından küçüktür.

Sorular:

1. Kenarlarının uzunlukları a = 3 cm. ; b = 5 cm. , c = 3,5 cm. olan üçgen var mıdır?

2. Kenarlarının uzunlukları a = 2 cm. , b = 6 cm. , c = 9 cm. olan üçgen var mıdır?

4. Üçgenin Açıları Arasındaki Bağıntılar

Bir defter kâğıdına bir $\widehat{ABC}$ üçgeni çiziniz. Sonra bu üçgenin $(\widehat{B})$ ve $(\widehat{C})$ açısal bölgelerini keserek "48. şekilde" görüldüğü gibi A köşesi dolayında toplayınız. Böylece üçgenin üç açısal bölgesi, köşesi A olan $(\widehat{XAY})$ düz açısal bölgesini oluştururlar. Buna göre,

$$s(\widehat{A}) + s(\widehat{B}) + s(\widehat{C}) = s(\widehat{XAY})$$

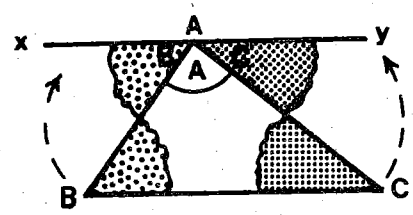
yazılır. Oysa, $(\widehat{XAY})$ düz açısal bölgesinin ölçümü

$$s(\widehat{XAY}) = 180°$$

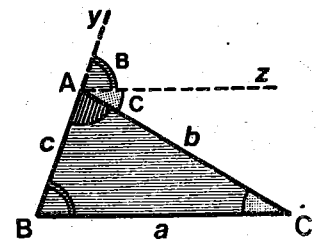
dir. Öyleyse :

$$s(\widehat{A}) + s(\widehat{B}) + s(\widehat{C}) = 180°$$

olur.



48. Şekil



49. Şekil

Bir de şöyle düşününüz :

A köşesinden BC doğrusuna paralel bir [AZ ışını çiziniz. [BA] kenarını A yanında uzatınız. Bu uzantı [AY ışını olsun. Böylece, "49. şekilde" meydana gelen yöndeş ve içters açıları gösteriniz. Yöndeş iki açının ölçümleri ve içters iki açının ölçümleri eşit midir? Öyleyse :

$$\begin{aligned}
s(\widehat{A}) &= s(\widehat{BAC}) && \text{(Özeşlik.)}\\
s(\widehat{B}) &= s(\widehat{YAZ}) && \text{(Yöndeş iki açı eştir.)}\\
+\ s(\widehat{C}) &= +\ s(\widehat{ZAC}) && \text{(İçters iki açı eştir.)}\\
s(\widehat{A}) + s(\widehat{B}) + s(\widehat{C}) &= s(\widehat{BAC}) + s(\widehat{YAZ}) + s(\widehat{ZAC})\\
&= s(\widehat{BAY}) = 180°
\end{aligned}$$

yazılır. Bu özeliği, sözle şöyle anlatırız :

Bir üçgenin iç açılarının ölçümlerinin toplamı 180° dir.

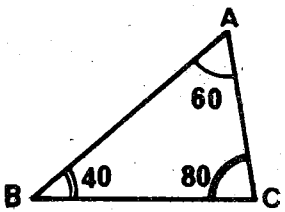
Soru :

Bir üçgende birden fazla dik açı ya da geniş açı bulunabilir mi?

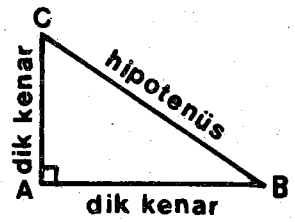
5. Açılarına Göre Üçgenlerin Çeşitleri

a) Dar Açılı Üçgen

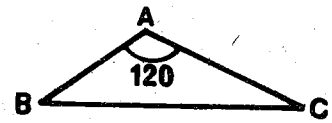
Üç açısı da dar açı olan üçgene **dar açılı üçgen** denir (50 şekil).



50. Şekil



51. Şekil



52. Şekil

b) Dik Açılı Üçgen

Bir açısı dik açı olan üçgene **dik açılı üçgen** ya da kısaca **dik üçgen** adı verilir. Dik açının bulunduğu köşede birleşen kenarlara, dik üçgenin **dik kenarları,** dik açının karşısındaki kenara da **hipotenüs** denir (51. şekil).

Bir dik üçgenin öbür iki açısı da dar açıdır. Niçin?

c) Geniş Açılı Üçgen

Bir açısı geniş açı olan üçgene **geniş açılı üçgen** denir (52. şekil).

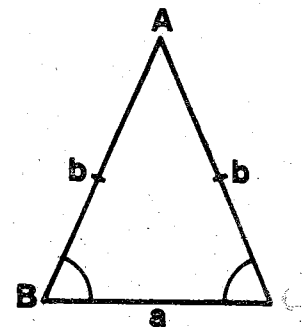
Geniş açılı bir üçgende öbür iki açı nasıl açılardır?

6. İkizkenar Üçgenin Açıları

"53. şekilde" $\widehat{ABC}$ ikizkenar üçgeninde $|AB| = |AC|$ dir. Bu üçgenin $(\widehat{B})$ ve $(\widehat{C})$ açılarını ölçünüz. Ne buldunuz?

Bir kez de şöyle düşününüz :

Göstergen bir kâğıda $\widehat{ABC}$ ikizkenar üçgenin kopyasını çıkarınız. Sonra göstergen kâğıdı ters çevirerek, A köşesi yine A'ya, B köşesi C'ye ve C köşesi de B'ye gelecek şekilde göstergen kâğıttaki üçgeni, $\widehat{ABC}$ ikizkenar üçgeninin üzerine koyunuz. $\widehat{B}$ açısının $\widehat{C}$ açısı ile ve $\widehat{C}$ açısının da $\widehat{B}$ açısı ile çakıştığını göreceksiniz. Buna göre,



53. Şekil

$$s(\widehat{B}) = s(\widehat{C})$$

yazılır.

Bu $\widehat{B}$ ve $\widehat{C}$ açılarına ikizkenar üçgenin **taban açıları,** $\widehat{A}$ açısına da **tepe açısı** adı verilir.

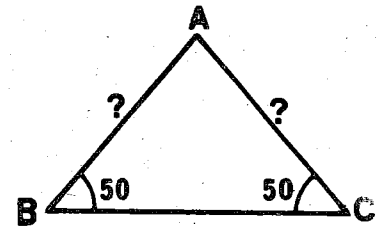
Yukarıda gördüğümüz özeliği sözle şöyle anlatırız :

Bir üçgende iki kenarın uzunlukları eşit ise bu kenarların karşılarındaki açıların ölçümleri eşittir.

Şimdi, bu önermenin karşıtını inceleyelim.

Uzunluğu $|BC| = 4$ cm. olan [BC] doğru parçasını alınız. Sonra $(\widehat{B})$ ve $(\widehat{C})$ açılarının ölçümleri 50° olacak biçimde $\widehat{ABC}$ üçgenini çiziniz (54. şekil).

Bu üçgenin [AB] ve [AC] kenarlarının uzunluklarını ölçünüz. Ne buldunuz?



54. Şekil

Bir kez de şu denemeyi yapınız :

Göstergen bir kâğıda bu $\widehat{ABC}$ üçgeninin kopyasını çıkarınız. Sonra bu kâğıdı ters çevirerek, B köşesi C'ye ve C köşesi de B'ye gelecek biçimde göstergen kâğıttaki üçgeni $\widehat{ABC}$ üçgeninin üzerine

yatırınız. $(\widehat{B})$ ve $(\widehat{C})$ açılarının ölçümleri eşit alındığı için $(\widehat{B})$ açısının [BA kenarı [CA ile ve $(\widehat{C})$ açısının [CA kenarı da [BA ile üst üste gelir. Böylec A köşesi de kendisi ile çakışır. Öyleyse :

$$|AB| = |AC|$$

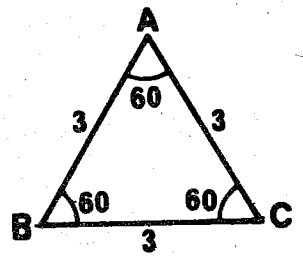
dir. Bu özeliği sözle şöyle anlatırız :

Bir üçgende iki açının ölçümleri eşit ise bu açıların karşılarında bulunan kenarların uzunlukları eşittir.

"55. şekilde" $\widehat{ABC}$ eşkenar üçgeni verilmiştir. Bu üçgeni kaç türlü ikizkenar üçgen olarak düşünebilirsiniz? Öyleyse,

$$s(\widehat{A}) = s(\widehat{B}) = s(\widehat{C}) = 60°$$

yazılır.



55. Şekil

Uygulamalar :

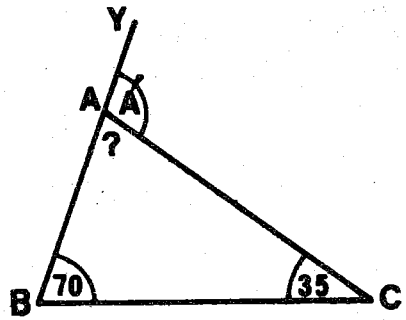
1. "56. şekilde" $\widehat{ABC}$ üçgeninde $s(\widehat{B}) = 70°$, $s(\widehat{C}) = 35°$ dır.

a) $(\widehat{A})$ açısının ölçümü kaç derece olur?

b) $(\widehat{A})$ açısının komşu ve bütünleri olan $(\widehat{A'})$ açısına üçgenin A köşesindeki dış açısı denir.

$$s(\widehat{A'}) = s(\widehat{B}) + s(\widehat{C})$$

olduğunu gösteriniz.



56. Şekil

Çözüm :

a) Bir üçgenin iç açılarının ölçümlerinin toplamı 180° olduğundan,

$$s(\widehat{A}) + 70° + 35° = 180° \text{ ya da } s(\widehat{A}) + 105° = 180°$$

yazılır. Çıkarmanın tanımına göre,

$$s(\widehat{A}) = 180° - 105° = 75°$$

bulunur.

b) $(\widehat{A'})$ dış açısı $(\widehat{A})$ iç açısının komşu ve bütünleri olduğundan,

$$s(\widehat{A'}) + s(\widehat{A}) = 180°$$
$$s(\widehat{A'}) + 75° = 180°$$

yazılır ve buradan

$$s(\widehat{A'}) = 105°$$

bulunur. Öte yandan,

$$s(\widehat{B}) + s(\widehat{C}) = 70° + 35° = 105°$$

dir. Öyleyse :

$$s(\widehat{A'}) = s(\widehat{B}) + s(\widehat{C})$$

eşitliği yazılır. Bu özeliği, sözle şöyle anlatırız :

Bir üçgenin bir dış açısının ölçümü, komşu olmayan iki iç açısının ölçümlerinin toplamına eşittir.

2. "57. şekilde" $s(\widehat{A}) = 80°$, $s(\widehat{B}) = 60°$ dir. $\widehat{ABC}$ üçgeninin $\widehat{A'}$, $\widehat{B'}$, $\widehat{C'}$ dış açıları çizilmiştir.

a) $(\widehat{C})$ açısının ölçümü kaç derecedir?

b) Üçgenin dış açılarının ölçümlerini hesaplayınız. Sonra bu dış açıların ölçümleri toplamının 360° olduğunu gösteriniz.

Çözüm :

a) $s(\widehat{A}) + s(\widehat{B}) + s(\widehat{B}) = 180°$

$$80° + 60° + s(\widehat{C}) = 180°$$
$$s(\widehat{C}) = 40°$$

bulunur.

b) $s(\widehat{A'}) = 180° - s(\widehat{A})$

$s(\widehat{A'}) = 180° - 80° = 100°$;

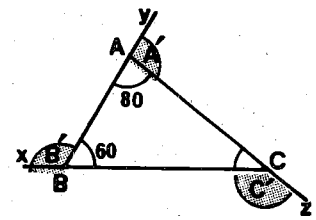
$s(\widehat{B'}) = 180° - s(\widehat{B})$;

$s(\widehat{B'}) = 180° - 60° = 120°$;

$s(\widehat{C'}) = 180° - s(\widehat{C})$;

$s(\widehat{C'}) = 180° - 40° = 140°$

olur. Buradan,



57. Şekil

$$s(\hat{A}) + s(\hat{B}) + s(\hat{C}) = 100° + 120° + 140° = 360°$$

olduğu bulunur.

Bir de şöyle düşününüz :

Üçgenin her köşesindeki iç ve dış açısının ölçümlerinin toplamı 180° dir. Buna göre, üçgenin üç iç ve üç dış açısının birlikte toplamı

$$3 \times 180° = 540°$$

olur. Bunun 180° si iç açıların ölçümlerinin toplamı, geri kalan,

$$540 - 180° = 360°$$

si de dış açıların ölçümlerinin toplamı olur. Öyleyse :

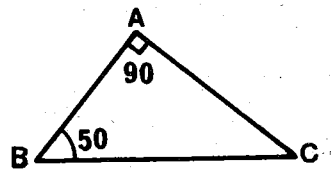
Bir üçgenin dış açılarının ölçümlerinin toplamı 360° dir.

3. $\hat{A}$ açısı dik açı olan bir $\hat{ABC}$ dik üçgeninde $s(\hat{B}) = 50°$ dir. $\hat{C}$ açısının ölçümü kaç derece olur?

Çözüm :

$$s(\hat{A}) + s(\hat{B}) + s(\hat{C}) = 180° ;$$
$$90° + 50° + s(\hat{C}) = 180° ;$$
$$140° + s(\hat{C}) = 180°$$

yazılır. Buradan, çıkarmanın tanımına göre,



58. Şekil

$$s(\hat{C}) = 180° - 140° = 40°$$

bulunur. Görülüyor ki, bir dik üçgenin iki dar açısı vardır ve bunlar **tümler iki açıdır.**

ALIŞTIRMALAR

A Grubu :

1. Aşağıda kenarlarının uzunlukları verilen üçgenlerden hangileri çizilebilir?

a) a = 3 cm., b = 4 cm., c = 5 cm.,

b) a = 6 cm., b = 2 cm., c = 4 cm.,

c) a = 3,5 cm., b = 4 cm., c = 7,8 cm.

2. İletki ve cetvel yardımıyle bir ikizkenar üçgen çiziniz.

3. İletki ve cetvel yardımıyle bir eşkenar üçgen çiziniz.

4. İletki ve cetvel yardımiyle,

a) Dar açılı bir üçgen çiziniz.

b) Geniş açılı bir üçgen çiziniz.

5. İletki ve cetvel yardımiyle bir dik üçgen çiziniz.

B Grubu :

6. İkişer açılarının ölçümleri aşağıda verilen üçgenlerin üçüncü açılarının ölçümleri kaçar derece olur?

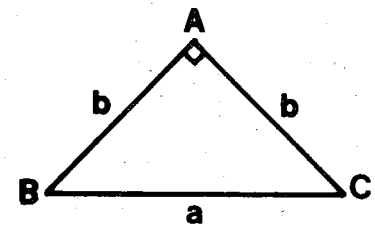
a) 45° ve 45° ; **b)** 30° ve 30° ; **c)** 40° ve 70° ;

d) 90° ve 30° ; **e)** 60° ve 60° ; **f)** 105° ve 40° .

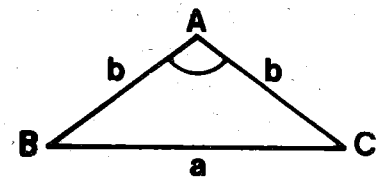
7. Bir ikizkenar üçgenin bir taban açısının ölçümü 50° dir. Bu ikizkenar üçgenin öbür taban açısı ve tepe açısı kaçar derece olur.

8. Tepe açısı 100° olan ikizkenar üçgenin taban açıları kaçar derece olur?

9. Hem ikizkenar hem dik açılı olan üçgen var mıdır? Varsa, bunun yanal kenarları hangi kenarlardır? Böyle bir üçgene **ikizkenar dik üçgen** adı verilir (59. şekil).



59. Şekil



60. Şekil

10. Hem ikizkenar hem geniş açılı olan üçgen var mıdır? Varsa, geniş açı, bu ikizkenar üçgenin neresinde bulunur (60. şekil).

11. Hem çeşit kenar, hem dik açılı olan üçgen var mıdır? Varsa bir örnek çiziniz.

12. Çeşitkenar ve geniş açılı olan bir üçgen çiziniz.

13. Üçgenler kümesi $Ü$, çeşitkenar üçgenler kümesi $Ç$, ikizkenar üçgenler kümesi $İ$, eşkenar üçgenler kümesi E, dik üçgenler kümesi D, geniş açılı üçgenlerin kümesi de G ile gösteriliyor.

Aşağıdaki önermelerden doğru olanın soluna D, yanlış olanın soluna Y yazınız :

a) $Ç \subset Ü$; b) $Ç \cap İ = \emptyset$; c) $E \subset İ$; d) $E \cap İ = E$;

e) $Ç \cup İ = Ü$; f) $D \subset Ç$;

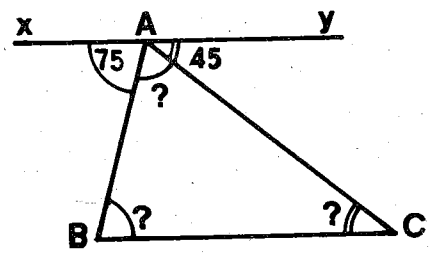
g) $İ \cap D$ = ikizkenar dik üçgenler ;

h) $G \cap Ç$ = geniş açılı çeşitkenar üçgenler;

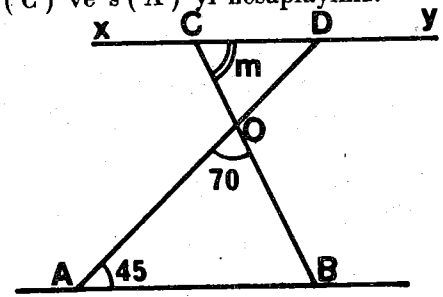
i) $Ç \cap D$ = çeşitkenar dik üçgenler.

14. "61. şekilde" XY // BC dir. $\widehat{XAB}$ ile $\widehat{B}$ ve $\widehat{YAC}$ ile $\widehat{C}$ nasıl açılardır.

Verilenler yardımıyle $s(\widehat{B})$, $s(\widehat{C})$ ve $s(\widehat{A})$ yı hesaplayınız.



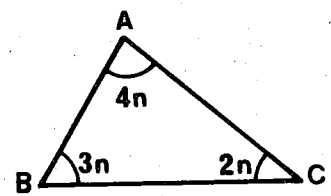
61. Şekil



62. Şekil

15. "62. şekilde" AB//CD dir. Verilenlere göre m° nin değeri nedir?

16. "63. şekilde" $\widehat{ABC}$ üçgeninin her açısının ölçümü açıların içlerine yazılmıştır. n sayısının değeri nedir?



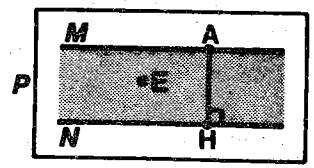
63. Şekil

4–5. PARALELKENAR

1. Paraleller Şeridi

Bir (P) düzlemi içinde birbirine paralel M ve N doğrularını alalım. Bu paralel iki doğrunun üzerinde ve arasında bulunan tüm

noktaların oluşturduğu kümeye **paraleller şeridi** ya da kısaca **şerit** denir (64. şekil).



64. Şekil

M ve N paralel doğruları, bu şeridin **sınır doğrularıdır.** Bu şeridi $[M , N]$ biçiminde gösteririz.

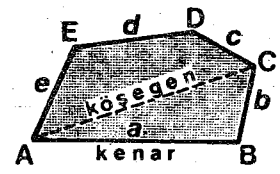
Paralel iki doğrudan birinin üzerindeki bir A noktasının öbür doğruya uzaklığına, şeridin **genişliği** denir.

2. Çokgen

"65. şekilde" [AB] , [BC] , [CD] , [DE] , [EA] **ardışık doğru** parçalarının birleşiminden meydana gelen kapalı şekle **çokgen** adı verilir. Bu doğru parçaları çokgenin **kenarlarıdır.** Doğru parçalarının uçları da çokgenin **köşeleridir.** Çokgenler kenarlarının sayısına göre adlandırılırlar. **Üçgen, dörtgen, beşgen, altıgen, ...** gibi.

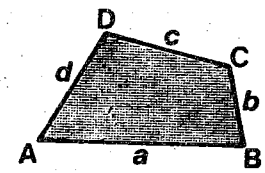
Bir çokgenin her açısının iç bölgesinde bulunan bir nokta çokgenin içindedir. Böyle noktaların kümesi çokgenin **iç bölgesidir.**

Çokgen ile iç bölgesinin birleşimine **çokgensel bölge** adı verilir.



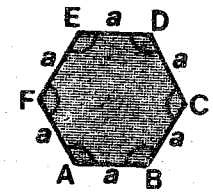
beşgen

65. Şekil



dörtgen

66. Şekil



düzgün altıgen

67. Şekil

Bir çokgende, bir kenarın uçlarına **komşu köşeler** denir. Komşu olmayan iki köşeyi birleştiren doğru parçasına **köşegen** adı verilir.

"67. şekilde" görülen altıgende

$$|AB| = |CD| = |DE| = |EF| = |FA| \text{ ve}$$

$$s(\widehat{A}) = s(\widehat{B}) = s(\widehat{C}) = s(\widehat{D}) = s(\widehat{E}) = s(\widehat{F}) \text{ dir.}$$

Böyle bir çokgene **düzgün çokgen** denir. (67. şekildeki" altıgen, **düzgün altıgendir.**)

Kare ve **eşkenar üçgen** birer **düzgün çokgendir.**

3. Paralelkenar

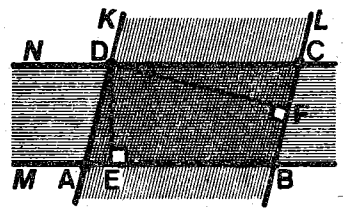
"68. şekilde" $[M, N]$ şeridi ile $[K, L]$ şeridinin kesişimi

$$[M, N] \cap [K, L] = ABCD$$

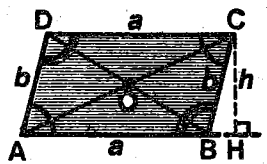
dir. Bu ABCD şekline paralelkenarsal bölge ya da kısaca **paralelkenar** denir.

Başka bir söyleyişle, karşı kenarları paralel olan dörtgen bir **paralelkenardır.** Şekildeki ABCD paralelkenarında

$$AB // CD \text{ ve } AD // BC \text{ dir.}$$



68. Şekil



69. Şekil

A, B, C, D noktaları bu paralelkenarın **köşeleri,** [AB], [BC], [CD] ve [DA] doğru parçaları da **kenarlarıdır.**

$CH \perp AB$ çizelim. [CH] doğru parçası, bu paralelkenarın [AB] ya da [CD] kenarı ile ilgili **yüksekliğidir.**

4. Paralelkenarın Özelikleri

'69. şekildeki" paralelkenarın karşı [AB] ve [CD] kenarlarının uzunluklarını ölçünüz. Ne buldunuz? $|AD|$ ve $|BC|$ uzunluklarını da dikkatlice ölçünüz. Bulduğunuz ölçümler eşit midir? Bunlara göre,

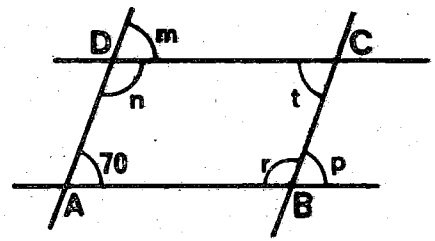
$$|AB| = |CD| \text{ ve } |AD| = |BC|$$

yazılabilir mi? Bunu sözle şöyle anlatırız :

Paralelkenarların karşı kenarları birbirine eştir.

"70. şekilde" ABCD paralelkenarının $\widehat{A}$ ve $\widehat{C}$ açılarına **karşı açılar** denir. $\widehat{B}$ ve $\widehat{D}$ açıları da **karşı açılardır.** Köşeleri bir kenarın uçlarında bulunan $\widehat{A}$ ve $\widehat{B}$ gibi iki açıya, paralelkenarın **ardışık açıları** denir.

Şekilde $s(\widehat{A}) = 70°$ dir. $\widehat{A}$ açısı ile yöndeş olan açılar hangileridir?



70. Şekil

$$s(\widehat{m}) = 70° \text{ ve } s(\widehat{p}) = 70°$$

yazılabilir mi?

$$s(\widehat{m}) + s(\widehat{n}) = 180° \; ; \quad s(\widehat{p}) + s(\widehat{r}) = 180°$$

$$70° + s(n) = 180° \; ; \quad 70° + s(r) = 180°$$

$$s(\widehat{n}) = 180° - 70° = 110° \; ; \quad s(\widehat{r}) = 180 - 70° = 110°$$

bulunur. Öyleyse :

$$s(\widehat{A}) = s(\widehat{C}) \; ; \; s(\widehat{B}) = s(\widehat{D}) \text{ ve}$$

$$s(\widehat{A}) + s(\widehat{B}) = 180° \; ; \; s(\widehat{A}) + s(\widehat{D}) = 180°$$

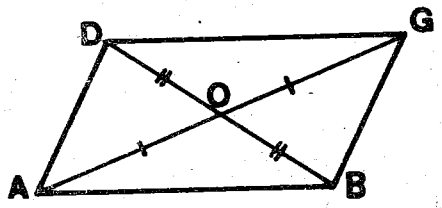
yazılır. Bu özelikleri sözle şöyle anlatınız :

a) Bir paralelkenarda karşı açılar eştir.
b) Bir paralelkenarda ardışık iki açı bütünlerdir.

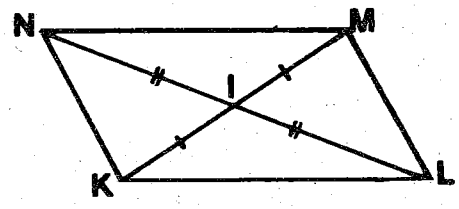
"71. şekilde" verilen ABCD paralelkenarının [AC] ve [BD] köşegenleri çizilmiştir. Bu köşegenlerin kesişme noktası O olsun. $|OA|$ ve $|OC|$ uzunluklarını ölçünüz. Ne buldunuz? $|OB|$ ve $|OD|$ uzunluklarını ölçerek karşılaştırınız.

$$|OA| = |OC| \text{ ve } |OB| = |OD|$$

yazılabilir mi?



71. Şekil



72. Şekil

"72. şekilde" verilen KLMN paralelkenarının köşegenlerinin kesişme noktası I dır. Ölçerek,

$$|IK| = |IM| \quad \text{ve} \quad |IL| = |IN|$$

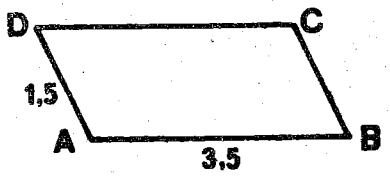
olduğunu gerçekleyiniz.

Bu örneklerden anlıyoruz ki :

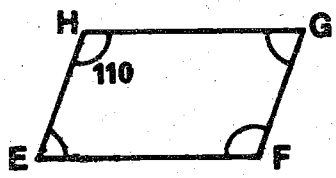
Bir paralelkenarın köşegenleri birbirini ortalar.

ALIŞTIRMALAR

1. "73. şekilde" verilen ABCD paralelkenarının iki kenarının uzunlukları üzerlerine yazılmıştır. Öbür iki kenarının uzunluklarını bulunuz. Bu paralelkenarın çevresi kaç cm. dir?



73. Şekil



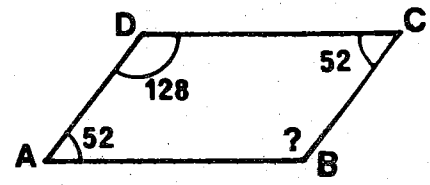
74. Şekil

2. "74. şekilde" verilen EFGH paralelkenarında $s(\widehat{H}) = 110°$ dir. Bu paralelkenarın öbür açılarının ölçümlerini hesaplayınız.

3. Paralelkenar biçiminde bir tarlanın ardışık iki kenarının uzunlukları 65 m. ve 45 m. dir. Bu tarlanın çevresi kaç metredir? Bu tarlanın çevresine 5 er metre ara ile ve her köşede bir ağaç bulunmak üzere ağaç dikilecektir. Kaç tane fidan gereklidir?

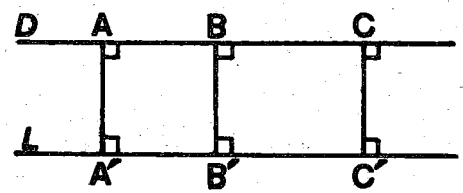
4. Bir paralelkenarın bir açısının ölçümü 72° dir. Öbür açılarının ölçümlerini hesaplayınız.

5. "75. şekilde" verilen ABCD dörtgeninin üç açısının ölçümleri içlerine yazılmıştır. Bu dörtgen bir paralelkenar olabilir mi?



75. Şekil

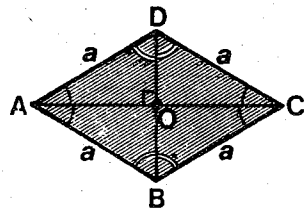
6. "76. şekilde" $D//L$ dir. D doğrusu üzerinde alınan A, B, C noktalarının L doğrusuna olan uzaklıklarını ölçünüz. Bu uzaklıklar eşit midir? Bu uzaklığa, **iki paralel doğru arasındaki uzaklık** denir.



76. Şekil

5. Eşkenar Dörtgen

Dört kenarının uzunluğu birbirine eşit olan dörtgene **eşkenar dörtgen** denir. Başka bir söyleyişle, genişliği eşit olan iki şeridinin kesişimi bir **eşkenar dörtgendir.**



77. Şekil

Eşkenar dörtgen, bir köşesinden çıkan iki kenarının uzunluğu eşit olan bir paralelkenardır. Bu bakımdan, paralelkenarın bütün özeliklerini taşır. Ayrıca :

"77. şekilde" verilen eşkenar dörtgenin köşegenleri arasındaki açıları ölçünüz. Bu açılar dik açı mıdır? [AC] köşegeni $(\widehat{A})$ ve $(\widehat{C})$ açılarının açıortayı oluyor mu? Bunu iletki ile araştırınız. Aynı araştırmayı [BD] köşegeni için de yapınız.

Bir eşkenar dörtgenin köşegenleri, birbirini dik olarak ortalar ve her köşegen, geçtiği köşelerdeki açıların açıortayıdır.

6. Dikdörgen

Dikdörtgen, sınır doğruları birbirine dik olan iki ayrı şeridinin kesişimidir.

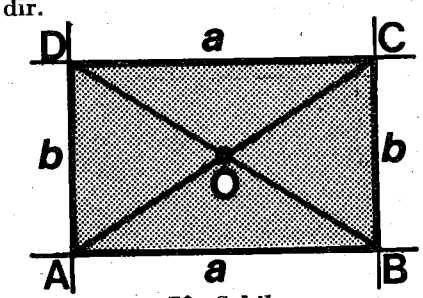
Başka bir söyleyişle, açıları dik açı olan paralelkenar bir **dikdörtgen**dir. Bu nedenle, dikdörtgen, paralelkenarın tüm özeliklerini taşır. "78. şekilde" verilen dikdörtgenin köşegenlerinin uzunluklarını ölçünüz. Ne buldunuz?

Bir dikdörtgende, karşı kenarlar paraleldir; karşı kenarların uzunlukları eşittir; köşegenler birbirini ortalar ve köşegenlerin uzunlukları eşittir.

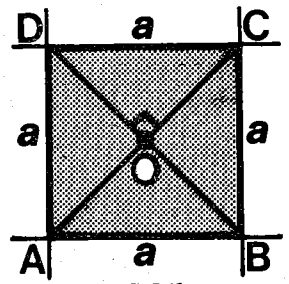
$|AB| = |CD|$; $AD // BC$ ve $|AD| = |BC|$;

$|OA| = |OB| = |OC| = |OD|$

dir.



78. Şekil



79. Şekil

7. Kare

Kare, kenarlarının uzunlukları eşit bir dikdörtgendir. Başka bir söyleyişle, kenarları eş ve açıları dik açı olan dörtgen **kare**dir. Bu nedenle, kare, dikdörtgenin ve eşkenar dörtgenin tüm özeliklerini taşır. Bu özelikleri şöyle özetleriz :

Bir karede, dört kenarın uzunlukları eşittir; dört açı dik açıdır; köşegenlerin uzunlukları eşittir; köşegenler birbirini dik olarak ortalar; her köşegen, geçtiği köşedeki açıların açıortayıdır.

Uygulamalar :

1. O noktasında birbirine dik M ve N doğruları çiziliyor. M doğrusu üzerinde O 'nun iki yanında $|OA| = |OC| = 1{,}5$ cm. olacak biçimde A ve C noktaları işaretleniyor. N doğrusu üzerinde de O nun iki yanında $|OB| = |OD| = 1$ cm. olacak biçimde B ve D noktaları alınıyor.

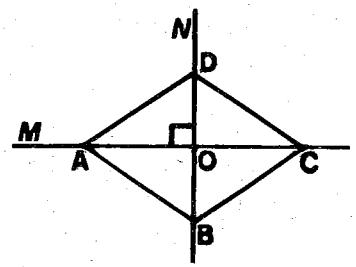
ABCD dörtgeni nasıl bir dörtgendir?

Çözüm :

İstenen şekli, verilenlere göre defterinize çiziniz. Sonra bu şeklin göstergen kâğıt üzerine bir kopyasını yapınız. ABCD dörtgenini göstergen kâğıttan keserek çıkarınız. Sonra bu dörtgeni bir kez [AC] köşegeni boyunca ve bir kez de [BD] köşegeni boyunca katlayınız. Bu katlama işlemleri sonunda

$|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$

olduğunu görürsünüz. O halde bu ABCD dörtgeni bir eşkenar dörtgendir.



80. Şekil

2. O noktasında birbirine dik olan M ve N doğruları çiziliyor. Bu doğrular üzerinde

$|OA| = |OC| = |OB| = |OD| = 1{,}5$ cm.

olacak biçimde, A , C ve B , D noktaları alınıyor.

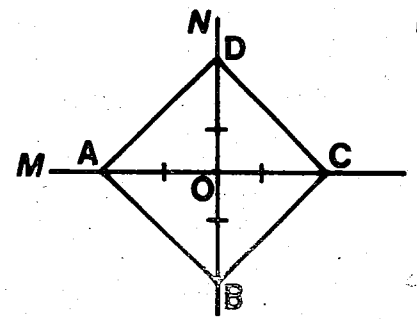
ABCD dörtgeni nasıl bir dörtgen olur?

Çözüm :

Verilenlere göre çizilen ABCD dörtgeni "81. şekilde" görülüyor. Göstergen bir kâğıda bu dörtgenin bir kopyasını yapınız ve keserek kâğıttan çıkarınız. Yukarıda yapıldığı gibi, katlama yöntemiyle

$|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$

olduğunu sağlayınız.



81. Şekil

Öte yandan,

$$|OA| = |OB| \quad \text{ve} \quad s(\widehat{AOB}) = 90°$$

olarak verildiği için OAB üçgeni ikizkenar dik üçgendir. Şekilde böyle kaç tane ikizkenar dik üçgen vardır? İkizkenar dik üçgenin taban açılarının ölçümleri 45° olduğundan,

$$s(\widehat{BAD}) = s(\widehat{BAO}) + s(\widehat{OAD})$$

$$s(\widehat{BAD}) = 45° + 45° = 90°$$

bulunuz. Bunun gibi, ABCD dörtgeninin öbür açıları da dik açı olur. Öyleyse, kenarlarının uzunlukları eşit açıları dik açı olan ABCD dörtgeni bir karedir.

KARIŞIK ALIŞTIRMALAR

A Grubu :

1. Komşu ve bütünler (a) ve (b) açılarının ölçümleri arasında,

$$s(\hat{a}) = \frac{4}{5} \cdot s(\hat{b})$$

bağıntısı vardır. Bu açıların ölçümlerini hesaplayınız.

2. $\widehat{ABC}$ üçgeninde $s(\hat{A}) = 72°$; $s(\hat{C}') = 120°$ dir. Üçgenin öbür iç ve dış açılarının ölçümlerini hesaplayınız.

3. Aşağıdaki çizelgede $\widehat{ABC}$ üçgeninin kimi iç ve dış açılarının ölçümleri verilmiştir. Üçgenin öbür iç ve dış açılarının ölçümlerini hesaplayınız.

$\widehat{ABC}$ üçgeninde :					
$s(\hat{A})$	$s(\hat{A}')$	$s(\hat{B})$	$s(\hat{B}')$	$s(\hat{C})$	$s(\hat{C}')$
40°	?	50°	?	?	?
?	110°	?	?	45°	?
?	?	?	130°	?	100°
75°	?	60°	?	?	?
100°	?	70°	?	?	?

B Grubu :

4. $\widehat{ABC}$ üçgensel bölgesi veriliyor. A, B, C köşelerinden karşı kenarlara paraleller çizilmiştir.

a) Böylece elde edilen yeni şekil kaç kenarlı bir çokgen olur?

b) Kaç tane paralelkenar meydana gelmiştir?

c) Bu paralelkenarsal bölgelerin ikişer ikişer arakesitini boyayarak gösteriniz.

5. Bir ABCD dikdörtgeninin köşegenlerinin arasında 130° lik bir açı vardır. Köşegenlerin, kenarlarla yaptığı açıları hesaplayınız.

6. a) $|AB| = |AD|$ olmak üzere, bir $\widehat{ABD}$ ikizkenar üçgeni çiziniz.

b) ABCD eşkenar dörtgenini çiziniz.

c) $[AC] \cap [BD] = \{O\}$ olduğuna göre, $(\widehat{AOB})$, $(\widehat{AOD})$, $(\widehat{BOC})$ ve $(\widehat{DOC})$ açılarını ölçünüz. Ne buldunuz?

d) $|OB| = |OD|$ ve $|OA| = |OC|$ olduğunu gösteriniz.

C Grubu :

7. Bir çokgenin iki köşegeni vardır. Bu çokgen kaç kenarlıdır?

8. Bir dışbükey dörtgenin iç açılarının ölçümlerinin toplamı kaç derecedir?

9. Bir beşgen çiziniz. Bunun köşegenlerini çiziniz. Kaç köşegeni vardır?

10. Bir dışbukey altıgen çiziniz. Bunun bir köşesinden kaç tane köşegen çizebilirsiniz?

11. Bir ABCD paralelkenarında

$$s(\hat{A}) = 3 \times p° \quad \text{ve} \quad s(\hat{B}) = 2 \times p°$$

dir. Bu paralelkenarın açılarının ölçümleri kaçar derecedir?

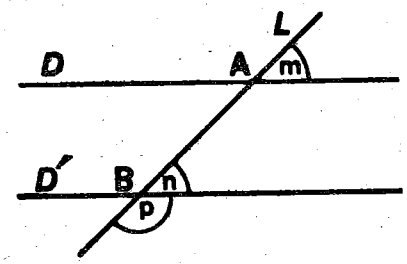
12. Bir KLMN paralelkenarının $(\hat{K})$ açısının ölçümü, $(\hat{L})$ açısının ölçümünün $\frac{2}{3}$ sidir. Bu paralelkenarın açılarının ölçümlerini bulunuz.

KENDİMİZİ DENEYELİM

TEST SORULARI

1. "82. şekilde" görülen $(\hat{m})$ ve $(\hat{n})$ açıları nasıl açılardır?

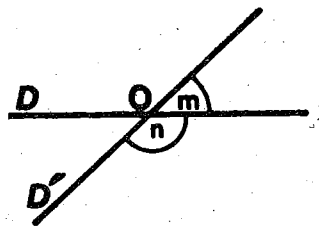
a) Ters açılar ; b) İçters açılar ;
c) yöndeş açılar ; d) komşu açılar ;
e) Dişters açılar.



82. Şekil

2. $s(p) = 132°$ olduğuna göre $(\hat{m})$ açısının ölçümü aşağıdakilerden hangisi olur?

a) 30° ; b) 36° ; c) 42° ;
d) 48° ; e) 50° .



83. Şekil

3. "83. şekilde" $s(\hat{m}) = 35°$ dir. $(\hat{n})$ açısının ölçümü aşağıdakilerden hangisine eşittir.

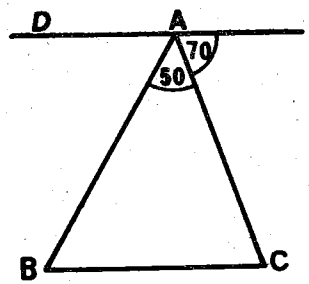
a) 150° ; b) 145° ; c) 120° ;
d) 132° ; e) 162° .

4. Bir $\hat{ABC}$ üçgeninde AD//BC ve

$s(\hat{CAD}) = 70°$, $s(\hat{BAC}) = 50°$

olduğuna göre, $\hat{B}$ açısının ölçümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) 30° ; b) 40° ; c) 60° ;
d) 63° ; e) 48° .



84. Şekil

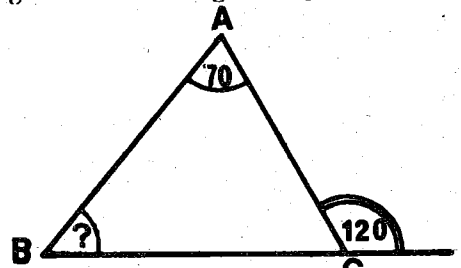
5. $\hat{ABC}$ ikizkenar ($|AB| = |AC|$) üçgeninin tepe açısının ölçümü 52° dir. Bu üçgenin taban açılarından birinin ölçümü nedir?

a) 60° ; b) 70° ; c) 64° ; d) 74° ; e) 45° .

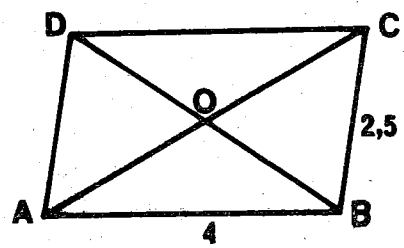
6. $\hat{ABC}$ dik üçgeninde $s(\hat{A}) = 90°$, $s(\hat{B}) = \frac{s(\hat{C})}{2}$ dir. $(\hat{C})$ açısının ölçümü aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a) 20° ; b) 60° ; c) 72° ; d) 80° ; e) 64° .

7. $\hat{ABC}$ üçgeninde "85. şekilde" görüldüğü gibi C köşesindeki dış açının ölçümü 120° ve $s(\hat{A}) = 70°$ dir. $(\hat{B})$ açısının ölçümü aşağıdakilerden hangisine eşittir?



85. Şekil



86. Şekil

a) 30° ; b) 48° ; c) 50° ; d) 60° ; e) 53°

8. "86. şekilde" ABCD paralelkenarında,

$|AB| = 4$ cm., $|BC| = 2{,}5$ cm. , $|AC| = 5$ cm. ve

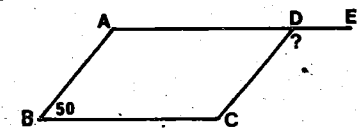
$[AC] \cap [BD] = \{O\}$

dur.

$|OA|$ nın ölçümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) 2 cm. ; b) 2,5 cm. ; c) 2,25 cm. ;
d) 3 cm. ; e) 3,5 cm.

9. "87. şekilde" ABCD paralelkenarında $s(\hat{B}) = 50°$ olduğuna göre, $(\hat{CDE})$ açısının ölçümü aşağıdakilerden hangisine eşittir?



87. Şekil

a) 150° ; b) 130° ; c) 120°
d) 145° ; e) 136° .

10. Bir paralelkenarda aşağıdaki anlatımlardan hangisi doğrudur?

a) Bir paralelkenarda köşegenler birbirine eştir?
b) Bir paralelkenarda köşegenler birbirine diktir.
c) Bir paralelkenarda köşegenler birbirini ortalar.
d) Bir paralelkenarda karşı açıların ölçümlerinin toplamı 180° dir.
e) Bir paralelkenarda komşu kenarlar birbirine eşitir.

11. Bir dikdörtgende aşağıdaki anlatımlardan hangisi doğrudur?

a) Bir dikdörtgende köşegenler birbirine diktir.

b) Bir dikdörtgende komşu kenarlar birbirine eştir.

c) Bir dikdörtgende iç açıların toplamı 400° dir.

d) Bir dikdörtgende köşegenler birbirine eştir.

e) Bir dikdörtgende dış açıların ölçümlerinin toplamı, 5 dik açıdır.

12. Bir ikizkenar üçgende aşağıdaki anlatımlardan hangisi doğrudur?

a) Bir ikizkenar üçgenin taban açılarının her biri 30° dir.

b) Bir ikizkenar üçgende tepe açısının ölçümü, taban açılarının her birinin ölçümünden büyüktür.

c) Bir ikizkenar üçgende taban açıları birbirine eştir.

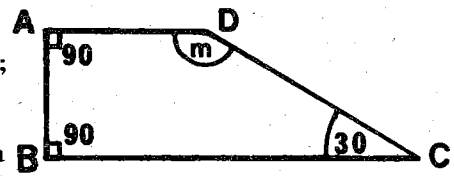
d) Bir ikizkenar üçgende tabanın bir köşesinden çıkan yükseklik, aynı zamanda açıortay ve kenarortaydır.

e) Bir ikizkenar üçgende üç yükseklik birbirine eştir.

13. "88. Şekilde" gösterilen $(\widehat{m})$ açısının ölçümü aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a) 100° ; **b)** 120° ; **c)** 150° ;

d) 135° ; **e)** 110° .



88. Şekil

14. Bir $\widehat{ABC}$ ikizkenar üçgeninin taban açılarından birinin ölçümü 75° dir. Bu üçgenin A köşesindeki dış açısının ölçümü nedir?

a) 120° ; **b)** 165° ; **c)** 140° ; **d)** 150° ; **e)** 130° ;

15. Bir $\widehat{ABC}$ üçgeninde aşağıdaki bağıntılardan hangisi doğrudur? a, b, c, üçgeninin kenarlarının ölçümleridir?

a) $a < b + c$; **b)** $2a \leqslant b - c$; **c)** $a < b - c$;

d) $2a = b + c$ **e)** $\frac{a-b}{2} = c$

16. Bir altıgenin kaç tane köşegeni vardır?

a) 10 ; **b)** 9 ; **c)** 12 ; **d)** 8 ; **e)** 6 .

17. Bir dik üçgende bir dar açının ölçümü, öbürünün ölçümünün 5 katıdır. Büyük olan dar açının ölçümü nedir?

a) 50° ; **b)** 65° ; **c)** 75° ; **d)** 80° ; **e)** 55°.

18. Bir ikizkenar üçgende tepe açısının ölçümü taban açılarından birinin ölçümünün yarısıdır. Bu üçgenin taban açısı kaç derecedir?

a) 60° ; **b)** 72° ; **c)** 48° ; **d)** 80° ; **e)** 56°.

19. Köşegenleri eş olan bir paralelkenar aşağıdaki şekillerden hangisi olur?

a) Kare ; **b)** Eşkenar dörtgen ; **c)** Dikdörtgen ; **d)** Dörtgen

e) Hiçbiri.

20. Bir dikdörtgenin çevresi 28 cm. dir. Bu dikdörtgenin boyu eninden 2 cm. fazladır. Boyu nedir?

a) 4 cm. ; **b)** 5 cm. ; **c)** 6 cm. ; **d)** 8 cm. ; **e)** 10 cm.

5. BÖLÜM ÇEMBER VE DAİRE

Konunun Ayrıntıları

5–1. Çember, Çemberin Çizimi, Çemberin Düzlemde Ayırdığı Bölgeler
5–2. Çember ve Doğru (Kiriş, Çap, Kesen, Teğet.)
5–3. Çemberde Yaylar
5–4. Merkez Açı
5–5. Çemberin Çevresi
5–6. Dairenin Alanı
5–7. Silindir, Alanı ve Hacmi

5–1. ÇEMBER, ÇEMBERİN ÇİZİMİ, ÇEMBERİN DÜZLEMDE AYIRDIĞI BÖLGELER

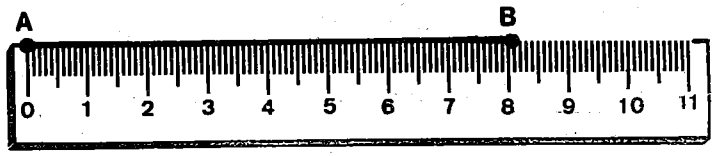
1. İki Nokta Arasındaki Uzaklık

A ve B noktaları arasındaki uzaklık denilince, uçları bu noktalar olan [AB] doğru parçasının uzunluğu anlaşılır.

Defterinize A ve B gibi iki nokta işaret ediniz ve bu iki nokta arasındaki uzaklığı cetvelle ölçünüz.

"1. şekildeki" [AB] doğru parçasının uzunluğunun 8 cm. olduğu görülüyor. Bu uzunluğu şöyle gösteririz :

$$|AB| = 8 \text{ cm.}$$



1. Şekil

Bu kez, cetvelde 0 'a karşı gelen noktayı, B noktası ile çakıştırarak [BA] nın uzunluğunu ölçünüz. Bu ölçmede

$$|BA| = 8 \text{ cm.}$$

bulunur. Öyleyse :

$$|AB| = |BA| \quad \text{dır.}$$

Özel olarak, A ve B noktaları çakışık (üst üste) olursa,

$$A = B \text{ ve } |AB| = 0 \text{ (Sıfır)}$$

yazılır.

2. Arada Olma

Bir [AB] doğru parçası göz önüne alalım (2. şekil). $C \in [AB]$ olsun. Bu C noktası A ile ya da B ile çakışık değilse, "C noktası A ile B nin **arasındadır**" denir. Bu durumda [AC], [CB] ve [AB] nin uzunlukları arasında

2. Şekil

$$|AC| + |CB| = |AB|$$

eşitliği yazılır.

3. Bir Doğru Parçasının Orta Noktası

Bir [AB] doğru parçası ve bunun üzerinde bir O noktası göz önüne alalım (3. şekil).

3. Şekil

$$|OA| = |OB|$$

ise, O noktası [AB] doğru parçasının orta noktasıdır.

Burada, [AB] nin uzunluğu [AO] nun uzunluğunun 2 katı olduğu için

$$|AB| = 2\,|AO| \text{ ya da } |AO| = \frac{1}{2}\,|AB|$$

yazılır.

4. Bir Düzlem İçindeki Noktaların Belli Bir Noktaya olan Uzaklıkları

Defterinize bir O noktası işaretleyiniz. Bu noktadan geçen herhangi bir doğru çiziniz. Sonra "4. şekilde" gösterildiği gibi bu doğru üzerinde A, B ve C noktalarını alınız. Bu noktaların O noktasına olan uzaklıklarını ölçünüz. Elde edilen uzaklıkları karşılaştırınız.

"4. şekildeki" A noktası, O ve C noktaları arasında bulunduğu için [OA] nın uzunluğu [OC] nin uzunluğundan küçüktür. Bu da şöyle gösterilir :

$$|OA| < |OC|$$

Bu durumda, D doğrusu üzerinde O noktasından C ye doğru gidildiğinde, A noktasına C noktasından önce varılır.

4. Şekil

Sorular :

1. "4. şekilde" O noktası hangi iki nokta arasındadır?

2. A noktası hangi iki nokta arasında bulunur?

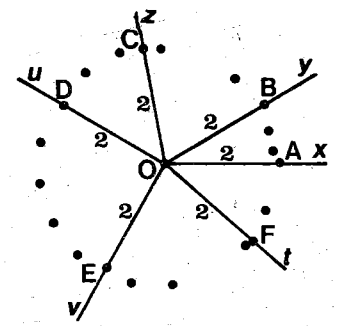
3. D doğrusu üzerinde O noktasından 2 cm. uzaklıkta kaç tane nokta vardır?

5. Çemberin Belirtilmesi

Bir düzlem içinde değişmeyen bir O noktası ve birbirinden ayrı [Ox , [Oy , [Oz, ... ışınlarını alalım. Bu ışınların üzerinde

$$|OA| = 2 \text{ cm.}, \quad |OB| = 2 \text{ cm.}, \quad |OC| = 2 \text{ cm.}, \ \ldots$$

ile belli olan A , B , C , ... noktalarını işaretleyelim (5. şekil). Böylece, başlangıçları ortak olan birbirinden ayrı ışınlar üzerinde O noktasından 2 cm. uzaklıkta olan birçok noktanın bulunabileceği görülür. Bu ışınlar O noktası dolayında döndükçe, bunlar üzerinde alınan noktaların düzlemdeki yerleri de değişir. Bu noktaların meydana getirdiği küme, **çemberdir.**



5. Şekil

Tanım :

Bir düzlemde değişmeyen bir O noktasından r uzaklığında bulunan noktalar kümesinin belirttiği şekle çember denir.

Değişmeyen O noktası çemberin **merkezi,** r de **yarıçapıdır.**

Merkezi O, yarıçap r olan çemberi $Ç(O, r)$ ile göstereceğiz. Yanlış anlama olmadığı durumlarda çember bir büyük harf ile de gösterilir : ($Ç$) çemberi gibi. Kimi zaman çemberi, merkezindeki harf ile de gösteririz : (O, r) çemberi ya da (O) çemberi gibi.

Soru :

Düzlem üzerinde A , B noktaları veriliyor.

$$|AB| = |AN|$$

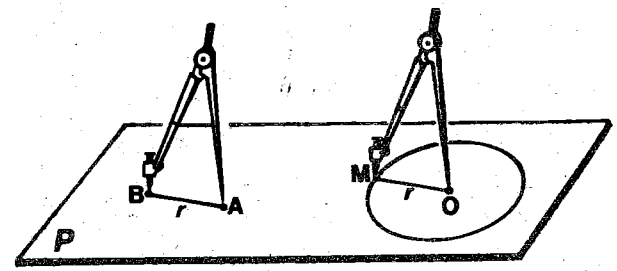
eşitliğine uyan N noktalarının oluşturduğu şekil bir çember midir? Bu çemberin merkezini ve yarıçapını söyleyiniz.

6. Çemberin Çizimi

Bir çemberin belli olması için, merkezi ile yarıçapının bilinmesi gerekir. Bir düzlem içinde belli bir O noktası ve

$$|AB| = r$$

uzunluğu verildiği zaman, çemberi, pergel adı verilen bir araç ile çizeriz. Pergelin bir ayağında sivri uc, öbür ayağında da çizgi çizmeye yarayan bir küçük kalem bulunur. Çemberi çizmek için pergelin ayaklarının arası verilen uzunluk (yarıçap) kadar açılır. Bundan sonra sivri uçlu ayak, çemberin merkezi olarak alınan O noktasına konulur; öbür ayak, O noktası dolayında bir çizgi çizecek biçimde gezdirilir. Böylece istenilen çember çizilmiş olur.



6. Şekil

$Ç(O, r)$ çemberi üzerinde bulunan her noktanın merkeze olan uzaklığı yarıçapa eşittir. Karşıt olarak, O merkezine olan uzaklığı r ye eşit olan her nokta da çember üzerindedir. Bunu,

$|OM| = r$ ise $M \in Ç(O,r)$ ve $M \in Ç(O,r)$ ise $|OM| = r$

ile gösteriyoruz.

O merkezine olan uzaklığı yarıçapa eşit olmayan her nokta çember üzerinde değildir. Ve çember üzerinde olmayan her noktanın merkeze olan uzaklığı da yarıçapa eşit olmaz. Bunu da,

$|OM| \neq r$ ise $M \notin Ç(O,r)$ ve $M \notin Ç(O,r)$ ise $|OM| \neq r$

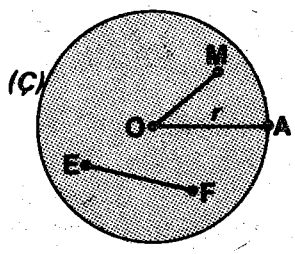
ile gösteriyoruz.

7. Çemberin İç Bölgesi

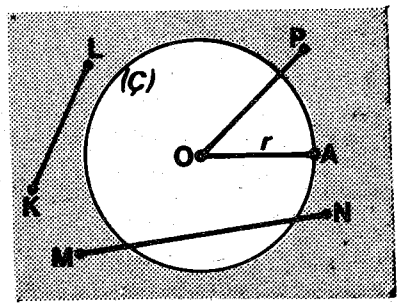
$Ç(O,r)$ çemberini göz önüne alalım.

$$|OM| < r$$

bağıntısını sağlayan M noktalarının kümesi, düzlemde bir bölgeyi oluşturur. Bu bölgeye, $Ç(O,r)$ çemberinin **iç bölgesi** denir. Bu bölge şekilde noktalı olarak gösterilmiştir. Çember üzerindeki noktalar, bu iç bölgenin elemanı değildirler. Bu bölgede alınan E ve F noktalarını birleştiren doğru parçası, tümüyle bu bölgenin içindedir (7. şekil).



7. Şekil



8. Şekil

8. Çemberin Dış Bölgesi

$$|OP| > r$$

bağıntısını gerçekleyen P noktalarının oluşturduğu kümeye, $Ç(O,r)$ çemberinin **dış bölgesi** denir. Çemberin dış bölgesinde bulunan herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçası, ya tümüyle bu bölgenin içindedir. ya da değildir. Sözgelimi, [KL] doğru parçasının tümü dış bölgededir. Oysa, [MN] doğru parçasının ancak bir kısmı dış bölgede bulunur (8. şekil).

9. Daire (Çembersel bölge)

Çember ve çemberin iç bölgesi biren noktalar kümesidir. Bu iki kümenin birleşimi yeni bir noktalar kümesi olur. Bu kümeye **daire** ya da **çembersel bölge** adı verilir. Daire şu şekilde tanımlanabilir :

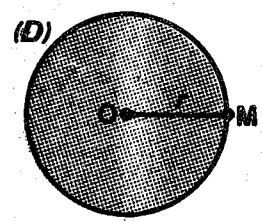
Tanım :

Düzlemde O değişmeyen bir nokta, M değişen bir nokta ve r bilinen bir uzunluk olduğuna göre,

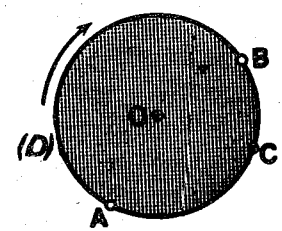
$$|OM| \leqslant r$$

bağıntısını sağlayan M noktalarının kümesine **daire** (çembersel bölge) denir. O noktası dairenin **merkezi** r de **yarıçapı** dır.

Merkezi O ve yarıçapı, r olan daireyi $D(O,r)$ şeklinde ya da karışıklık olmadığı durumlarda (D) ile göstereceğiz. Kimi zaman daireyi merkezindeki harf ile de gösteririz : (O,r) dairesi ya da (O) dairesi gibi (9. şekil).



9. Şekil



10 Şekil

"10. şekilde" içi boş olarak gösterilen A ve B noktaları, çemberin ve dairenin elemanları değildir. Bu durumda, çember, A ve B noktalarında **açık bir eğridir.** Daire de bu noktalarda **açıktır.** İçi dolu olarak belirtilen C noktası, çemberin de dairenin de elemanıdır.

Bu şekilde, dairenin çevresi üzerinde okla gösterilen yönde A dan B ye doğru devinen bir nokta C ye varabilir mi?

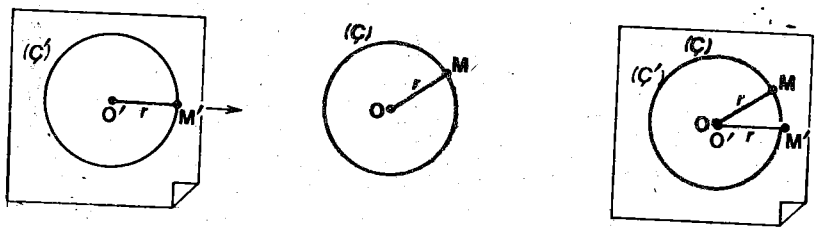
10. Eş (Eşölçülü) Çemberler

Defterinize yarıçaplarının ölçümleri eşit olan $Ç(O,r)$ ve $Ç'(O',r)$ çemberlerini çiziniz. $Ç'(O',r)$ çemberinin üzerine göstergen kâğıt koyarak kopyasını çıkarınız. Sonra göstergen kâğıdı kaldırınız ve O merkezi O' merkeziyle çakışacak biçimde, bunu, $Ç(O,r)$ çemberinin

üzerine koyunuz. Göstergeç kâğıdın üzerindeki $Ç'(O',r)$ çemberinin, tümüyle $Ç(O,r)$ çemberini örttüğünü göreceksiniz (11. şekil). Öyleyse, $Ç(O,r)$ ve $Ç'(O',r)$ çemberleri birbirine eştir. Bu incelemeden, şu özelikleri elde ederiz :

a) Yarıçapları eşit olan iki çember eştir.

b) Karşıt olmak, eş iki çemberin yarıçapları birbirine eşittir.



11. Şekil

Göstergeç bir kağıt üzerinde çizdiğiniz $Ç'(O',r)$ çemberini, O ve O' merkezleri üst üste gelecek biçimde $Ç(O,r)$ çemberi üzerine koyunuz. M ve M' noktaları birbiriyle çakışmıyorsa, O' merkezine bir toplu iğne batırınız. Sonra M' noktası, M noktasıyla üst üste gelinceye kadar $Ç'(O',r)$ çemberini döndürünüz. Bu durumda "$Ç'(O',r)$ çemberi, kendi düzlemi içinde merkezi dolayında bir dönme yapmıştır" deriz. Bu yöntemle, eş iki çemberin istenilen noktalarını birbiriyle çakıştırabiliriz.

ALIŞTIRMALAR

A Grubu :

1. Basit kapalı eğrilerin en düzgünü nedir?

2. Düzlemde başlangıç noktası O olan $[Ox$ ışını veriliyor. Bu ışın üzerinde $|ON| = 3$ cm. olacak biçimde kaç tane N noktası bulunabilir?

3. Bir $x'x$ doğrusu ile bu doğru üzerinde değişmeyen bir O noktası veriliyor. Bu doğru üzerinde $|ON| = 3$ cm. olmak üzere kaç tane N noktası alınabilir?

4. Defterinize A ve B gibi iki nokta işaretleyiniz. Merkezi A olan ve B noktasından geçen çemberin yarıçapı nedir?

5. Defterinize A ve B noktalarını işaretleyiniz. $|AB|$ çaplı çemberi nasıl çizersiniz? Bu çemberin başka çapı var mıdır? Yarıçapı ne kadardır?

6. Defterinizde bir O noktası işaretleyiniz. Merkezi O ve yarıçapı 4 cm. olan bir çember çiziniz. Bu çemberi $(Ç)$ ve bunun çevrelediği daireyi (D) ile gösteriniz. O dan geçen bir doğru üzerinde

$$|OA| = 3 \text{ cm.}, \quad |OB| = 4 \text{ cm.}, \quad |OC| = 5 \text{ cm.},$$

olacak şekilde A , B , C noktalarını alınız.

a) Bu noktalar çembere göre ne durumda bulunurlar?

b) Aşağıdaki noktalı yerlere $\in$ ya da $\notin$ işaretlerinden uygun olanını yazınız :

A ... $(Ç)$; B ... $(Ç)$; C ... $(Ç)$;

A ... (D) ; B ... (D) ; C ... (D) .

B Grubu :

7. Defterinize merkezi O ve yarıçapı r olan bir çember çiziniz. Bu çemberi $(Ç)$ ile gösteriniz. Çemberin düzleminde herhangi bir A noktası alınız. OA doğrusunu çiziniz.

a) $(Ç)$ çemberi ile $[OA$ ışınının arakesiti kaç noktadır?

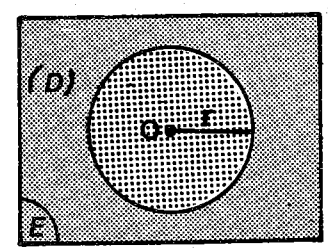
b) $(Ç) \cap OA$ kesişim kümesini belirtiniz.

c) $(Ç) \cap [OA]$ kesişim kümesine ait kaç nokta vardır? Bu kesişim kümesi, ne zaman boş kümedir; ne zaman boş küme değildir?

8. Çemberin iç bölgesi ile dış bölgesinin **kesişimi** neden **boş kümedir?**

9. Çemberin iç bölgesi ile dış bölgesinin **birleşimi** neden tam bir düzlem değildir?

10. "12. şekilde" daire ile dış bölgesinin birleşimi görülüyor. Bu **birleşim kümesi** tam bir düzlem midir?



5–2. ÇEMBER ve DOĞRU

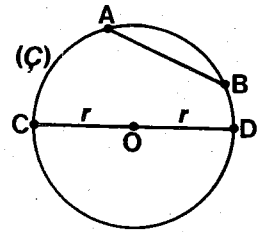
1. Kiriş

$Ç(O,r)$ çemberinin üzerinde alınan A ve B gibi iki noktayı birleştiren [AB] doğru parçasına çemberin **kirişi** denir (13 şekil). Bu şekilde,

$C \in (Ç)$ ve $D \in (Ç)$ olduğundan [CD] doğru parçası da çemberin bir kirişidir.

Çemberin merkezinden geçen kirişe çap diyoruz.

Çemberin bir [AB] kirişinin uzunluğundan söz edildiği zaman [AB] nin ölçümü anlaşılacaktır. Bu ölçüm, sayı olarak verilmemişse | AB | şeklinde yazılır.



13. Şekil

[CD] çapının uzunluğu da | CD | dir. Bundan böyle, sözgelişi. "çemberin çapı 4 cm. dir" denildiği zaman, çapın uzunluğunun 4 cm. olduğunu anlayacağız.

$Ç(O,r)$ Çemberinin [CD] çapının uzunluğu için

$$| CD | = 2 | OD |$$

yazılır.

$$| OD | = r \text{ (yarıçap)}$$

olduğundan

$$| CD | = 2r$$

ile gösterilir.

2. Kirişin Temel Özeliği

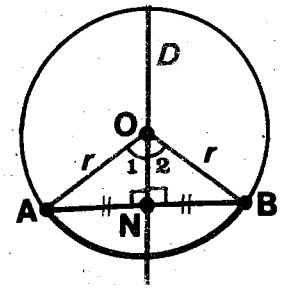
$Ç(O,r)$ çemberinde [AB] kirişini çiziniz. Ölçerek, bu kirişin N orta noktasını bulunuz. Bu noktayı O ile birleştiriniz (14. şekil).

($\widehat{AON}$) ve ($\widehat{BNO}$) açılarının ölçümlerini bulunuz (*). Buradan, ON doğrusunun [AB] kirişine dik olduğunu çıkarabilir misiniz?

* Söyleyiş kolaylığı bakımından **"açının ölçümü"** denildiği zaman, **"açısal bölgenin ölçümünü"** anlayacağız. Açısal bölgeyi gösteren harfleri parantez içinde yazıyoruz.

($\widehat{AON}$) ve ($\widehat{NOB}$) açılarını ölçünüz. Elde ettiğiniz sonuca bakarak, ON doğrusunun, ($\widehat{AOB}$) açısını iki eş parçaya böldüğünü söyleyebilir misiniz?

Öyleyse, çemberin bir kirişi için şu temel özeliği söyleyebiliriz :



14. Şekil

Bir çemberde, bir kirişin orta noktasını merkeze birleştiren doğru, bu kirişe diktir.

3. Doğru ve Çemberin Birbirine Göre Durumları

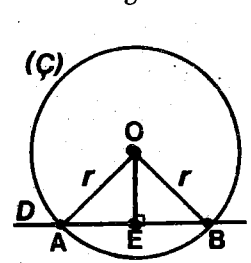
Defterinize bir D doğrusu ile $Ç(O,r)$ çemberini çiziniz (sözgelimi, $r = 2$ cm. olsun). Bu doğru ile çemberin birbirine göre üç durumda bulunduklarını göreceksiniz.

1. durum :

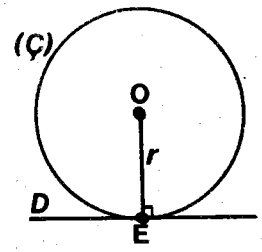
$D \cap (Ç) = \{ A , B \}$ dir (15. şekil).

Bu durumda, "D doğrusu, çemberi A ve B noktalarında keyor" denir.

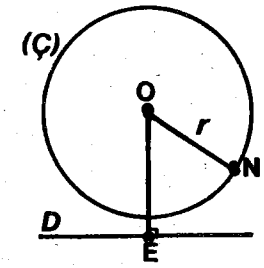
Bu D doğrusuna **kesen** adı verilir.



15. Şekil



16. Şekil



17. Şekil

[AB] kirişinin orta noktası E olsun. O ve E noktalarını birleştiriniz. [OE], [AB] kirişine dik midir? [OE], D doğrusuna dik midir?

$$|OE| < r$$

yazılabilir mi?

$|OE|$, E noktasının D doğrusuna olan uzaklığıdır.

$|OE| < r$ için $D \cap (Ç) = \{A, B\}$

yazılabilir mi?

2. durum :

$D \cap (Ç) = \{E\}$ dir (16. şekil).

Bu durumda, "D doğrusu çembere **teğettir**" denir. E noktası, teğetin **değme noktasıdır**.

$(\widehat{OED})$ açısını ölçünüz. Bu açının ölçümü kaç derecedir? Öyleyse :

Teğetin değme noktasını çemberin merkezine birleştiren doğru teğete diktir.

Bu özelikten yararlanarak, çember üzerinde verilen bir E noktasından bu çembere teğet şöyle çizilir :

Çemberin bir E noktası O merkezi ile birleştirilir.

OE doğrusu ile E noktasında 90° lik açı yapan bir D doğrusu çizilir.

Bu D doğrusu, $Ç(O,r)$ çemberine E noktasında teğet ise,

$$|OE| = r \text{ dir.}$$

Karşıt olarak,

$$|OE| = r$$

olduğu zaman, D doğrusu çembere teğet olur mu?

3. durum :

$D \cap (Ç) = \{\ \}$ dir (17. şekil).

Bu durumda, D doğrusu ile çemberin hiç ortak noktası yoktur. Başka bir söyleyişle, "D **doğrusu çemberin dışındadır**". Böyle bir durumda,

$$|OE| > r \text{ dir.}$$

Karşıt olarak, $|OE| > r$ için D doğrusu çembere göre ne durumdadır?

Uygulamalar :

1. Merkezi O, yarıçapı r olan bir çemberin N noktaları, bir noktalar kümesi oluştururlar. Bu kümeyi :

$$(Ç) = \{N \mid N \text{ düzlemin noktası ve } |ON| = r\}$$

biçiminde gösterebiliriz.

Pergel yardımıyle,

$$(Ç) = \{N \mid N \text{ düzlemin noktası ve } |ON| = 2 \text{ cm.}\}$$

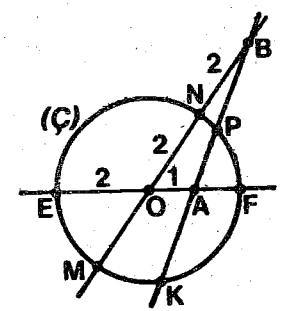
çemberini çiziniz. Sonra,

$$|OA| = 1 \text{ cm.} \ ; \ |OB| = 4 \text{ cm.}$$

olmak üzere A ve B noktalarını işaretleyiniz. OA, OB ve AB doğrularını çiziniz. "18. şekle" göre :

a) Aşağıda noktalı yerlere $\in$, $\notin$ işaretlerinden uygun olanını koyunuz :

A ... $(Ç)$
B ... $(Ç)$
N ... $(Ç)$



18. Şekil

b) Aşağıdaki eşitlikleri tamamlayınız :

$[OA] \cap (Ç) = ?$ $\quad OA \cap (Ç) = ?$
$[OB] \cap (Ç) = ?$ $\quad OB \cap (Ç) = ?$
$[AB] \cap (Ç) = ?$ $\quad AB \cap (Ç) = ?$

Çözüm :

a) $A \notin (Ç)$; $B \notin (Ç)$; $N \in (Ç)$.

b) $[OA] \cap (Ç) = \{\ \}$; $[OB] \cap (Ç) = \{N\}$;
$[AB] \cap (Ç) = \{P\}$ ve $OA \cap (Ç) = \{E, F\}$
$OB \cap (Ç) = \{M, N\}$; $AB \cap (Ç) = \{P, K\}$

olur (*).

2. Merkezi O ve yarıçapı r olan $(Ç)$ çemberinin iç bölgesini, N noktalarının kümesi olarak,

$$(İ) = \{N \mid N \text{ düzlemde bir nokta ve } |ON| < r\}$$

* Nokta kümeleri arasında yapılan kesişim, birleşim ve kapsama gibi işlemlerde, A ve B noktalarının belirttiği doğru AB şeklinde yazılmıştır.

biçiminde gösteririz. Bu iç bölge ile $(Ç)$ çemberinin birleşimi olan daireyi

$$(D) = \{ N \mid N \text{ düzlemde bir nokta ve } |ON| \leqslant r \}$$

biçiminde bir noktalar kümesi olarak yazarız.

Yarıçap 3 cm. olan $(Ç)$ çemberi ile [AC] doğru parçası veriliyor (19. şekil).

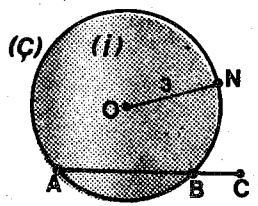
a) Bu $(Ç)$ çemberini, çemberin $(İ)$ iç bölgesini ve (D) dairesini noktalar kümesi olarak gösteririz.

b) Aşağıdaki kesişimleri bulunuz :

$(Ç) \cap [AC] = \ldots$; $(İ) \cap [AC] = \ldots$; $(D) \cap [AC] = \ldots$

c) Aşağıdaki noktalarla gösterilen yerlere, $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$ işaretlerinden uygun olanını koyunuz.

A ..... $(Ç)$;
C ..... $(Ç)$;
A ..... $(İ)$; B ..... $(İ)$
A ..... (D) ; B ..... (D)
[AB] .... $(İ)$;]AB[..... $(İ)$
{A , B} ... $(Ç)$; [AB] ..... (D)
{A , B} ... (D) ; $(Ç)$ ..... (D)



19. Şekil

Çözüm :

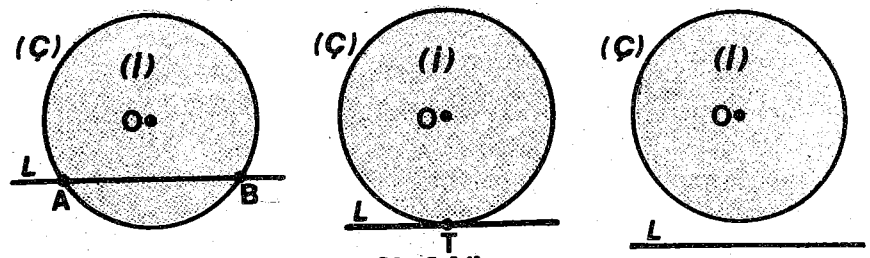
a) $(Ç) = \{ N \mid N \text{ düzlemde bir nokta ve } |ON| = 3 \text{ cm.} \}$;
$(İ) = \{ N \mid N \text{ düzlemde bir nokta ve } |ON| < 3 \text{ cm.} \}$;
$(D) = \{ N \mid N \text{ düzlemde bir nokta ve } |ON| \leqslant 3 \text{ cm.} \}$
dir.

b) $(Ç) \cap [AC] = \{ A , B \}$; $(İ) \cap [AC] =]AB[$
$(D) \cap [AC] = [AB]$
olur.

c) $A \in (Ç)$; $C \notin (Ç)$; $A \notin (İ)$;
$B \notin (İ)$; $A \in (D)$; $B \in (D)$;
$[AB] \not\subset (İ)$; $]AB[\subset (İ)$; $\{A , B\} \subset (Ç)$;
$[AB] \subset (D)$; $\{A , B\} \subset (D)$; $(Ç) \subset (D)$
olur.

3. Aşağıdaki şekilde bir $(Ç)$ çemberi ile L doğrusu üç durumda veriliyor. Çemberin iç bölgesi $(İ)$, bu iç bölge ile çemberin birleşiminden oluşan daire de (D) ile gösteriliyor. Her üç durumda aşağıdaki eşitlikleri tamamlayınız.

$L \cap (Ç) = ?$; $L \cap (İ) = ?$; $L \cap (D) = ?$



20. Şekil

Çözüm :

1. durum : $L \cap (Ç) = \{ A , B \}$; $L \cap (İ) =]AB[$;
$L \cap (D) = [AB]$.

2. durum : $L \cap (Ç) = \{ T \}$; $L \cap (İ) = \{ \}$;
$L \cap (D) = \{ T \}$.

3. durum : $L \cap (Ç) = \{ \}$; $L \cap (İ) = \{ \}$;
$L \cap (D) = \{ \}$.

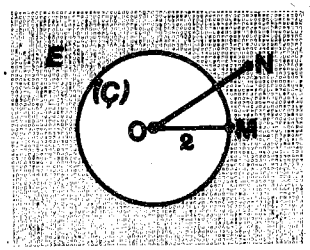
4. Düzlemde O değişmeyen bir nokta N de değişen bir nokta olsun.

$$E = \{ N \mid \ |ON| > 2 \text{ cm.} \}$$

biçiminde tanımlanan N noktalarının kümesini şekille gösteriniz.

Çözüm :

Bu düzlemde $\{ M \mid \ |OM| = 2 \text{ cm.} \}$ biçiminde tanımlanan noktalar kümesi, merkezi O ve yarıçapı 2 cm. olan bir $(Ç)$ çemberidir.



21. Şekil

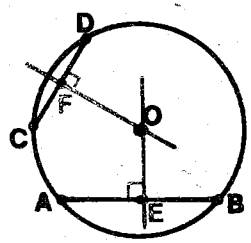
Verilen E kümesini meydana getiren N noktalarının O merkezine uzaklığı $|ON| > 2$ cm. olduğuna göre, N noktası $(Ç)$ çemberinin dışındadır. Şu halde, E kümesi çemberin dış bölgesidir (21. şekil).

ALIŞTIRMALAR

A Grubu :

1. Ç (O,2 cm.) çemberini çiziniz. Bu çemberde uzunlukları | AB | = 3 cm. ve | CD | = 2 cm. olan kirişleri çiziniz. Bu kirişlerin orta noktalarını bulunuz. Bu orta noktalar, sıra ile E ve F olsun.

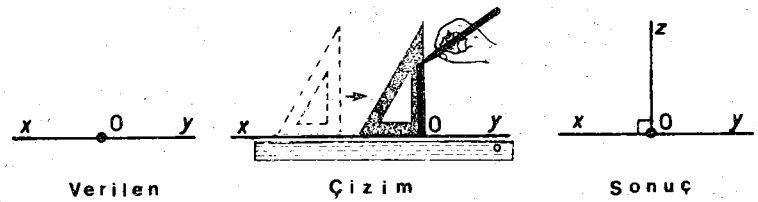
E noktasında [AB] kirişine dik olan doğruyu çiziniz. Aynı işlemi [CD] kirişi için de yapınız. Çizdiğiniz bu iki doğru, çemberin O merkezinden geçer mi (22. şekil)?



22. Şekil

Yol gösterme :

Bir doğruya, bu doğru üzerinde alınan bir noktadan dik doğru çiziminin cetvel ve gönye yardımı ile nasıl yapılacağını "23. şekilde" görüyorsunuz.



23. Şekil

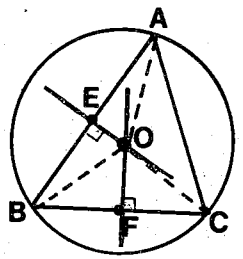
2. Defterinize, üçü bir doğru üzerinde olmayan A , B , C noktalarını işaretleyiniz. [AB] ve [CD] doğru parçalarının orta noktalarını bulunuz. Bu noktalar sıra ile E ve F olsun (24. şekil).

[AB] ve [BC] kirişlerine E ve F noktalarında dik olan doğruları çiziniz. Bu doğruların kesim noktası O olsun. Bu noktanın A , B , C noktalarına olan uzaklıkları için

| OA | = | OB | = | OC |

yazılabilir mi?

Merkezi O ve yarıçapı | OA | olan çemberi çiziniz. Bu çember B ve C noktalarından geçer mi?

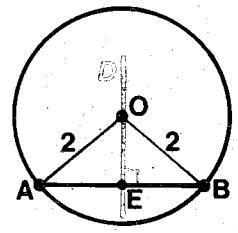


24. Şekil

Bu üç noktadan geçen başka çember var mıdır? Şu halde :

Bir doğru üzerinde bulunmayan üç noktadan bir ve yalnız bir çember geçer.

3. Merkezi O ve yarıçapı 2 cm. olan çemberi çiziniz. Bu çemberde, uzunluğu 3 cm. olan bir [AB] kirişi alınız (25. şekil).

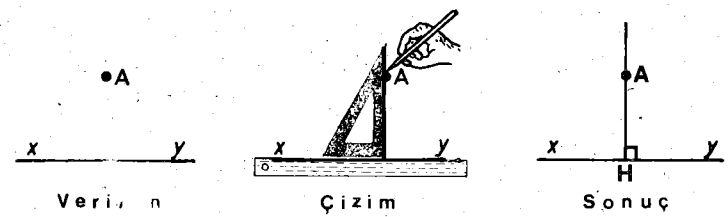


25. Şekil

O merkezinden [AB] kirişine dik bir doğru çiziniz. Bu doğru [AB] kirişinin ortasından geçer mi?

Yol gösterme :

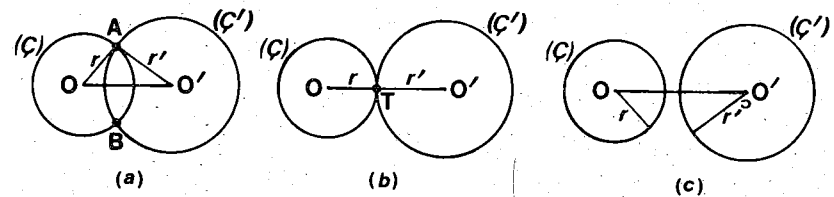
Bir doğruya dışındaki bir noktadan gönye ve cetvel yardımı ile dik bir doğrunun nasıl çizildiğini "26. şekilde" görüyorsunuz.



26. Şekil

4. "27. şekilde" gördüğünüz çemberler için aşağıdaki eşitliği tamamlayınız :

$$(Ç) \cap (Ç') = \ldots$$



27. Şekil

B grubu :

5. "27. şekilde" çemberlerin merkezlerinin uzaklığı $|OO'| = d$ ile gösteriliyor.

a) (a) şekline göre, $r' - r < d < r' + r$ olur. Niçin? Bu durumda, $(Ç)$ ve $(Ç')$ çemberleri iki noktada **kesişir.**

b) (b) şekline göre, $d = r + r'$ olur. Niçin? Bu durumda, $(Ç)$ ve $(Ç')$ çemberleri **dıştan teğettir.**

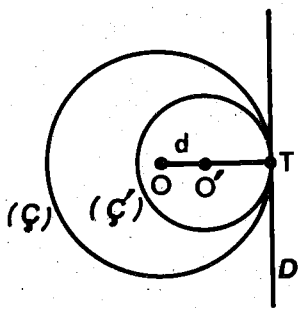
c) (c) şekline göre, $d > r + r'$ olur. Niçin? Bu durumda, $(Ç)$ ve $(Ç')$ çemberleri **dış dışadır.**

6. Defterinize, uzunluğu $d = 1$ cm. olan $[OO']$ doğru parçasını çiziniz. Sonra merkezi O ve yarıçapı $r = 2{,}5$ cm. olan $(Ç)$ çemberi ile merkezi O' ve yarıçapı $r' = 1{,}5$ cm. olan $(Ç')$ çemberini çiziniz (28. şekir).

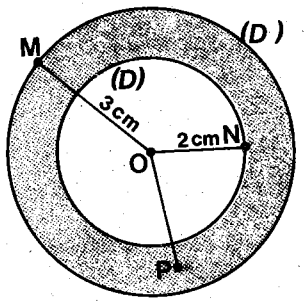
a) $(Ç) \cap (Ç') = \ldots$; **b)** $d = r - r'$

olduğunu sağlayınız.

Bu durumda, $(Ç)$ ve $(Ç')$ çemberleri **içten teğettir.**



28. Şekil



29. Şekil

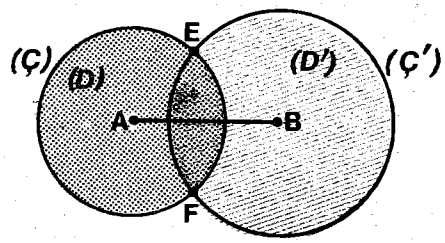
7. Merkezi O, yarıçapı 2 cm. olan daire (D) ve aynı merkezli ve yarıçapı 3 cm. olan daire (D') ile gösteriliyor.

a) Aşağıdaki noktalı yerleri doldurunuz :

$(D) \cap (D') = \ldots$; $(D) \cup (D') = \ldots$

b) Bu iki çemberin arasında kalan bölgeye **daire halkası** denir (29. şekildeki boyalı bölge). Bu daire halkasının herhangi bir noktası P olduğuna göre, $|OP|$ uzunluğunu yarıçaplarla karşılaştırınız.

8. Defterinize $|AB| = 4$ cm. olacak biçimde A ve B gibi iki nokta işaretleyiniz (30. şekil). Merkezi A, yarıçapı 2,5 cm. olan çemberi $(Ç)$, bu çemberin sınırladığı daireyi (D); merkezi B yarıçapı 3 cm. olan çemberi $(Ç')$, bu çemberin sınırladığı daireyi de (D') ile gösteriniz.



30. Şekil

a) $(Ç) \cap (Ç')$ kümesini belirtiniz. Bu kümenin kaç elemanı vardır?

b) $(Ç) \cup (Ç')$ kümesini renkli kalemle belirtiniz. Bu **birleşim kümesi** bir çember midir?

c) $(D) \cap (D')$ kümesini belirtiniz. Bu **kesişim kümesi** bir daire midir?

d) $(D) \cup (D')$ kümesini tarayarak gösteriniz. Bu **birleşim kümesi** bir daire midir?

9. Bir $Ç(O,r)$ çemberi üzerinde A, B, C noktaları alınıyor. Bu noktalar ikişer ikişer birleştiriliyor. En çok kaç tane kiriş elde edilir?

10. Merkezi O ve bir çapının uç noktaları A, B olan bir çember üzerinde C ve D noktaları işaretleniyor. A, B, C, D noktaları ikişer ikişer birleştiriliyor. Kaç tane kiriş elde edilebilir?

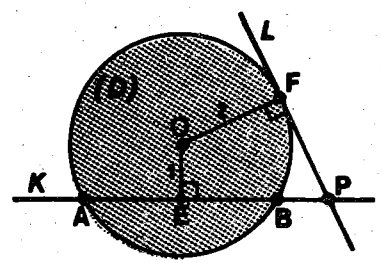
11. Merkezi O ve yarıçapı 2 cm. olan (D) dairesi ile bunun merkezinden 1 cm. uzaklıkta bulunan K doğrusu ve 2 cm. uzaklıkta olan L doğrusu veriliyor (31 şekil).

Aşağıdaki eşitlikleri tamamlayınız :

$(D) \cap K = \ldots$; $L \cap (D) = \ldots$

Bu K ve L doğrularına ne ad verilir?

$(D) \cap K$ kümesinin adı nedir?



31. Şekil

5-3. ÇEMBERDE YAYLAR

1. Arada Olma

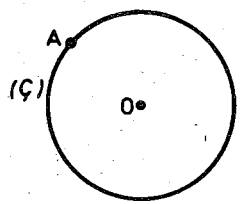
Bir xy doğrusu çiziniz. Bu doğru üzerinde bir A noktası işaretleyiniz. xy doğrusu, başlangıç noktası A olan [Ax ve [Ay ışınlarından oluşmuş gibi düşünülebilir. Bu durumda, doğru iki ışına ayrılmış olur. Böylece herhangi bir doğru, üzerinde alınan bir nokta ile iki parçaya ayrılır (32. şekil). Bu ayırmaya göre :

32. Şekil

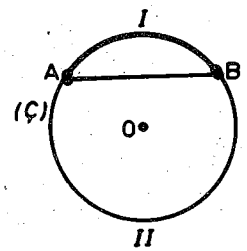
$$[Ax \cap [Ay = \{A\}, [Ax \cup [Ay = xy, \quad [Ax \subset xy, [Ay \subset xy,$$
$$xy \cap [Ax = [Ax, \quad xy \cap [Ay = [Ay, \quad xy \cup [Ax = xy \text{ ve}$$
$$xy \cup [Ay = xy$$

bağıntıları yazılabilir.

Şimdi de bir (Ç) çemberi üzerinde bir A noktası işaretleyiniz. Bu nokta çemberi iki parçaya ayırıyor mu? Doğru üzerindeki durum, burada niçin yoktur (33. şekil).?



33. Şekil



34. Şekil

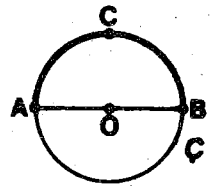
Çember üzerinde bir B noktası alınız. Şimdi çemberin iki parçaya ayrıldığını görüyorsunuz. Bu parçaların her birine **çemberin yayı** denir. A ve B noktaları bu yayların **uçları** olur. "34. şekle" göre,

$$(I) \text{ yayı} \cup (II) \text{ yayı} = (Ç)$$

dir. Bu yaylara **tamamlayan yaylar** adı verilir. Şu halde çemberde bir [AB] kirişi ile ilgili iki yay vardır. Bunlardan biri, öbüründen küçüktür. $\overset{\frown}{AB}$ yazılırsa "AB yayı" diye okunur ve bu yayların küçük olanı anlaşılır. Özet olarak diyebiliriz ki :

Çember üzerinde alınan her nokta çiftine bir kiriş ve iki yay karşılık olur.

[AB] kirişi çemberin çapı ise, bununla ilgili yay, **yarım çember** olur. Bu durumda $\overset{\frown}{AB}$ yazıldığı zaman, hangi yaydan söz edildiği anlaşılmaz. Karışıklığı önlemek için, belirtilecek yayın üzerinde bir nokta daha işaret edilir. Sözgelimi, $\overset{\frown}{ACB}$ yazıldığı zaman, şekilde koyu çizgi ile çizilen yayın alınacağını anlarız (35. şekil).



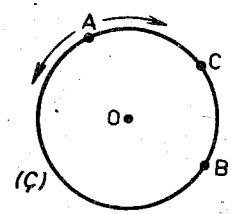
35. Şekil

Bir xy doğrusu ve bu doğru üzerinde yazıldıkları sıraya göre A , B ve C noktalarını alınız "36. şekle" göre, bu noktalardan B noktası kesin olarak A ile C nin arasındadır. Niçin? (| AB | + | BC | = | AC | olduğunu düşününüz).

36. Şekil

Bir (Ç) çemberi üzerinde A , B , C gibi üç nokta alınız. Bu noktalardan hangisi öteki ikisinin arasında bulunur? Kesin bir şey söyleyebilir misiniz?

Doğru üzerindeki sıralama durumu çember üzerinde niçin olmuyor? "37. şekle" göre, A noktasından başlayarak, çember üzerinde saat göstergelerinin yönünde gidilirse, C noktası A ile B nin arasındadır. Saat göstergelerinin ters yönünde gidilirse, B noktası A ile C nin arasındadır (37. şekil). Öyleyse :

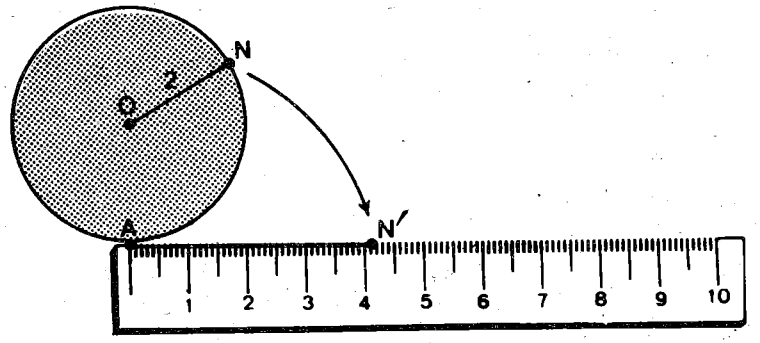


37. Şekil

Bir çember üzerinde alınan üç noktadan birinin öbür ikisinin arasında bulunduğunu kesin olarak söyleyemeyiz. Arada olma kavramı, yalnız doğru üzerinde bulunan üç nokta için söz konusudur.

2. Yayın Uzunluğu

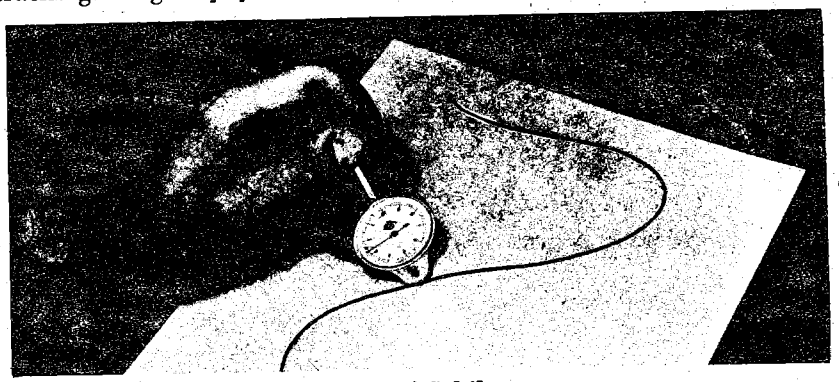
Kalınca bir karton üzerine yarıçapı 2 cm. olan bir çember çiziniz. Bu çember üzerinde A ve N gibi iki nokta işaretleyiniz. Kartonu çember boyunca dikkatlice kesiniz. Daire biçimindeki kartonu, A noktası, cetvelin sıfır bölümüne gelecek biçimde "38. şekilde" görüldüğü gibi koyunuz. Sonra kartonu, kaydırmadan cetvelin kenarı üzerinde yuvarlayınız.



38. Şekil

N noktası, cetvel üzerine gelince yuvarlamayı durdurunuz. N nin cetvel üzerindeki bu konumu N′ olsun. [AN′] doğru parçasının uzunluğu $\widehat{AN}$ nın **uzunluğudur.** bu uzunluk $|\widehat{AN}|$ şeklinde gösterilir.

Yayların uzunluklarını ölçmek için araçlar yapılmıştır. "39. şekilde **yay ölçer** aracını görüyorsunuz. Bu aracın sivri ucundaki küçük döner yuvarlak, ölçülecek olan yay üzerinde yürütüldüğü zaman aracın göstergesi yayın uzunluğunu verir.

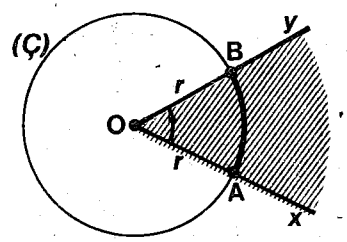


39. Şekil

5–4. MERKEZ AÇI

1. Merkez Açı Kavramı

Bir (Ç) çemberinin O merkezinden [Ox , [Oy ışınlarını çizelim.



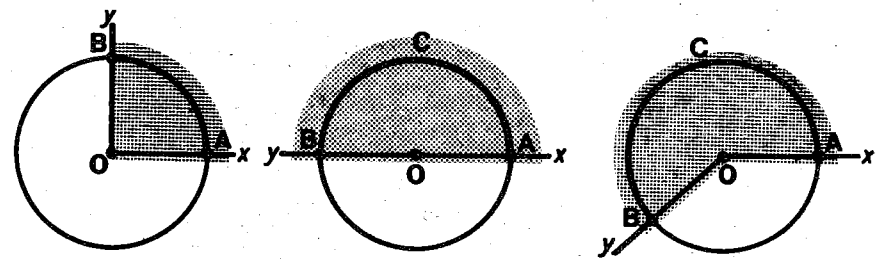
40. Şekil

$(\widehat{xOy})$ açısal bölgesine, **merkez açısal bölge** ya da kısaca **merkez açı** adı verilir.

$$(Ç) \cap (\widehat{xOy}) = \widehat{AB}$$

dır (*). Bu $\widehat{AB}$ yayına, (xOy) merkez açısının **gördüğü yay** denir. (40. şekil).

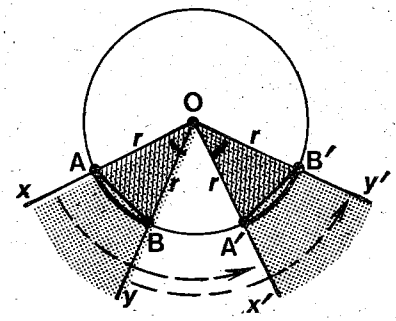
$(\widehat{xOy})$ merkez açısı, **dik açı, doğru açı** ya da **daha büyük** olarak alındığı zaman **gördüğü yaylar,** şekilde koyu çizgi ile gösterilmiştir (41. şekil).



41. Şekil

2. Eş Yaylar

Ç (O , r) çemberini çiziniz. "42. şekilde" görüldüğü gibi, herbiri 40° olan $(\widehat{xOy})$ ve $(\widehat{x'Oy'})$ merkez açılarını alınız. Sonra göstergen bir kâğıt üzerinde, bu çemberin ve $(\widehat{xOy})$ merkez açısının bir kopyesini çiziniz. O merkezine bir toplu iğne batırınız.



42. Şekil

* Yalnız nokta kümeleriyle ilgili **kesişim** ve **birleşim** işlemlerinde, karışıklığı önlemek için, [Ox ve [Oy ışınlarının birleşimi olan açıyı xOy ile, açısal bölgeyi de (xOy) ile gösteriyoruz.

s (xOy) = 40° biçimindeki bir eşitlik, (xOy) açısal bölgesinin ölçümünün 40 derece olduğunu gösterir.

Göstergen kâğıdı, [Ox ışını, [Ox' ışını üzerine gelinceye kadar, O merkezi dolayında okla gösterilen yönde döndürünüz. A noktasının A' ve B noktasının B' noktası ile çakıştığını göreceksiniz. Buna göre,

$$\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{A'B'} \quad \text{ve} \quad [AB] \cong [A'B']$$

yazılabilir mi? Şu halde :

Bir çemberde eş merkez açıların gördüğü yaylar eş ve bu yaylarla ilgili kirişler de birbirine eştir.

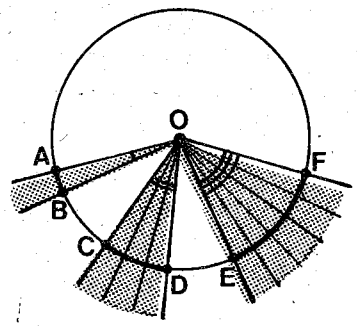
Şekilde $(\widehat{COD})$ merkez açısı, $(\widehat{AOB})$ merkez açısının üç katı ise, $\overset{\frown}{CD}$ yayının uzunluğu da, $\overset{\frown}{AB}$ yayının uzunluğunun üç katı olur. (43. şekil).

$(\widehat{AOB})$ merkez açısını, **açı birimi** ve AB yayının uzunluğunu da yayların uzunluğunu ölçmek için **yay birimi** olarak seçersek, şekle göre,

$s(\widehat{COD}) = 3\, s(\widehat{AOB}) \iff |\overset{\frown}{CD}| = 3\,|\overset{\frown}{AB}|$

$s(\widehat{EOF}) = 5\, s(\widehat{AOB}) \iff |\overset{\frown}{EF}| = 5\,|\overset{\frown}{AB}|$

dır. Burada görüldüğü gibi, açı birimi-nin gördüğü yayın uzunluğu, çemberin yaylarını ölçmek üzere birim olarak seçilirse bir $(\widehat{COD})$ merkez açısı ile $\overset{\frown}{CD}$ yayının ölçümleri aynı sayı ile gösterilir. Sözgelimi, 1° lik merkez açısının gördüğü yayın uzunluğu **birim** kabul edilirse, 30° lik merkez açının gördüğü yayın uzunluğu **30 birim** olur. Bir derecelik merkez açının gördüğü yaya **1° lik yay** adını vereceğiz. Buna göre, sözgelimi, 40° lik yay denince 40° lik bir merkez açının gördüğü yayı anlayacağız.



43. Şekil

Bütün çember **360° yay derecesine**, yarım çember **180° yay derecesine** ve dörtte-bir çember **90° yay derecesine** ayrılmıştır.

Çok küçük yaylar için **dakika** (′) ve **saniye** (″) birimleri kullanılır.

$$1° = 60' \quad \text{ve} \quad 1' = 60''$$

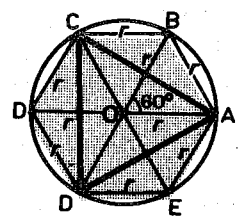
dir.

Pratikte bir yayın kaç derecelik olduğunu bulmak için bu yayın merkez açısını ölçmek yeter.

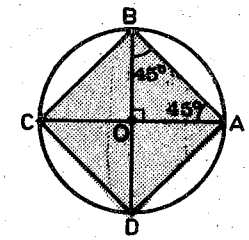
ALIŞTIRMALAR

1. Merkezi O ve yarıçapı r = 2 cm. olan bir çember çiziniz. Bu çember üzerinde bir A noktası alınız. A dan başlamak üzere şekildeki gibi, yarıçap uzunluğunda [AB] , [BC] , ... ardışık kirişlerini çiziniz. $\widehat{OAB}$ üçgeni nasıl bir üçgen olur? $(\widehat{AOB})$ merkez açısı kaç derecedir? Buna göre, çember kaç eş yaya ayrılmıştır? ABCDEF nasıl bir çokgendir? $\widehat{ACE}$ nasıl bir üçgendir?

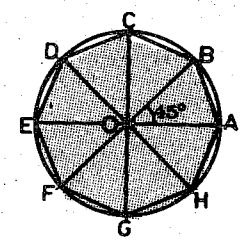
O halde, köşeleri bir çemberin üzerinde olan düzgün altıgeni nasıl çizersiniz? Bu ABCDEF altıgenine, **çemberin içine çizilen düzgün altıgen** adı verilir (44. şekil).



44. Şekil



45. Şekil



46. Şekil

2. Merkezi O ve yarıçapı r = 2 cm. olan bir çember çiziniz. Sonra bu çemberin [AC] ve [BD] gibi birbirine dik iki çapını çiziniz.

$\widehat{OAB}$, $\widehat{OBC}$, $\widehat{OCD}$, $\widehat{ODA}$ üçgenleri nasıl üçgenlerdir?

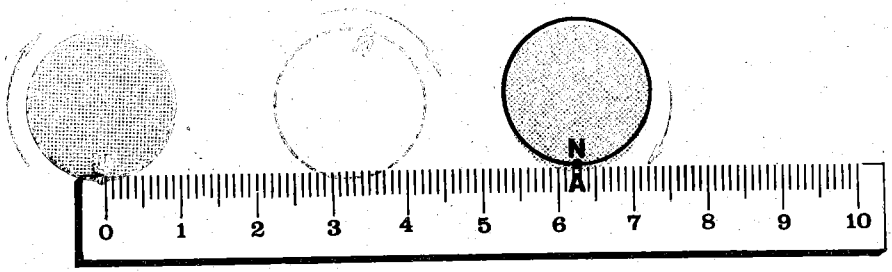
ABCD nasıl bir dörtgen olur (45. şekil)? Buna göre, bir çemberin içine **kare** nasıl çizilir?

3. "46. şekilde" her biri 45° olan ardışık merkez açılar alınmıştır. Çember kaç eş yaya ayrılmış olur. Buna göre, bir çemberin içine **düzgün sekizgeni** nasıl çizersiniz?

5-5. ÇEMBERİN ÇEVRESİ

Kalınca bir karton üzerine yarıçapı 1 cm. olan bir çember çiziniz. Çember üzerinde bir N noktası işaret ediniz. Sonra kartonu çember boyunca dikkatle kesiniz. Elde ettiğiniz daire biçimindeki kartonu "47. şekilde" görüldüğü gibi N noktası, cetvelin sıfır bölümüne gelecek biçimde koyunuz. Daire biçimindeki kartonu, N noktası yeniden

cetvel üzerine gelinceye kadar, kaydırmadan yuvarlayınız. Cetvel üzerinde N noktasının bu yeni yerine A harfini yazınız. Cetvel üzerinde A noktasına karşılık olan sayı, yarıçapı 1 cm. olan çemberin çevresinin uzunluğudur.



47. Şekil

Şekilde görüldüğü gibi bu çemberin çevresi 6 cm. ile 7 cm. arasında yaklaşık olarak 6,28 cm. dir.

Çapı 30 mm. olan bir çemberin çevresi aynı şekilde ölçülürse 94 mm. ile 95 mm. arasında bir sayı bulunur. Yaklaşık olarak bu çevre 94,2 mm. dir. Bu çevrenin çapa oranı,

$$\frac{94,2}{30} = 3,14$$ tür.

Bunun gibi, başka çemberlerin çevrelerini dikkatlice ölçerek çaplarına oranlarsak, 3,1415 ile 3,1416 arasında değişmeyen bir sayı buluruz. Bu sayıya (pi) diyoruz ve π ile gösteriyoruz. Bu açıklamaya göre, yarıçapı R olan bir çemberin çevresinin uzunluğunu $\mathcal{C}$ ile gözterirsek :

$$\mathcal{C} = 2\ \pi\ R$$

buluruz.

ALIŞTIRMALAR

1. Daire biçiminde bir testerenin yarıçapı 30 cm. dir. Bu testere dakikada 500 kez dönüyor. Bu testerenin dişlerinden biri, bir dakikada kaç metre yol alır?

2. Bir dikdörtgenin çevresi 24 cm. dir. Bu dikdörtgenin içine, üç kenara ve birbirine teğet iki çember çizilmiş olduğuna göre :

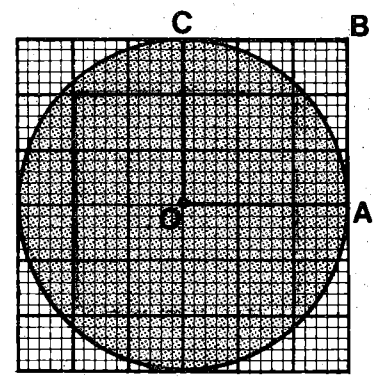
a) Bu çemberler eş midir?

b) Bu çemberlerden birinin çevresini hesaplayınız.

3. Bir kenarının uzunluğu 2 cm. olan karenin kenarları çap olmak üzere kare içinde dört yarım çember çiziliyor. Böylece elde edilen gülün çevresi ne kadardır?

5-6. DAİRENİN ALANI

Bir kenarı 6 cm. olan bir kare çiziniz. Bu karenin karşı kenarlarının orta noktalarını birleştiren doğruları çiziniz. Bu doğruların kesim noktası O olsun. Sonra O noktası merkez ve 3 cm. yarıçaplı çemberi çiziniz. Bu çember tümüyle karenin içindedir (48. şekil).



48. Şekil

Verilen kare içine bir kenarı 1 cm. olan küçük kareler çiziniz. Kenarı 6 cm. olan karenin alanı 36 cm^2 dir.

Daire içindeki tam karelerin sayısı 16 dır. Tam karelere göre dairenin alanı 16 cm^2 dir. Ama bu sayı dairenin alanını tam olarak gösteremez. Çünkü geriye kalan parçalı kareler hesaba katılmamıştır. Büyük kareyi cm^2 yerine mm^2 lere bölmüş olsaydık, dairenin içine daha çok sayıda (mm. kareler) yerleştirmiş olurduk.

"48. şekilde" 25 küçük kare 1 cm^2 dir. Buna göre alanı daha yaklaşık olarak buluruz. Bu biçimde yapılan hesaplamalar sonunda, dairenin alanı şekilde taranmış olan OABC karesinin alanının π katına eşit olur. OABC karesinin alanı, $3 \times 3 = 9$ cm^2 dir. Öyleyse, dairenin alanı,

$$\mathcal{A} = 9\ \pi\ cm^2$$

biçiminde yazılabilir. 3 cm. çemberin yarıçapıdır. Şu halde.

Dairenin alanı, yarıçapının karesiyle π sayısının çarpımına eşittir.

$$\mathcal{A} = \pi\ R^2$$

Okuma Parçası

Pi "π" Sayısı İle İlgili Tarih Bilgisi :

Çok eski zamanlardan beri çemberin çevresinin uzunluğu ile çapının uzunluğu arasındaki oran üzerinde durulmuştur. Bu konuyu bilimsel yönden ilk kez inceleyen ünlü eski Yunanlı düşünür ve matematikçi Arşimed (Arkhimêdês İÖ : 287–212) olmuştur. Arşimed bir çemberin içine çizilen düzgün çokgenler yardımı ile

π sayısını yaklaşık olarak $\frac{22}{7}$ bulmuştur.

Arkhimedes

π sayısı, tam ya da kesirli bir sayı değildir. π harfi, eski Yunanca'da "**çevre**" sözcüğünün ilk harfidir.

Eski çağlardan zamanımıza değin matematik konuları ve yöntemleri çok gelişmiştir. Bugün π sayısının değerini istediğimiz yaklaşıklık ile çok çabuk hesaplayabiliriz. Eski çağlarda bir düzlem şeklin alanı bulunurken, bu şeklin alanına eşit alanda olan bir kare aranır ve bu karenin alanı verilen şeklin alanı olurdu. Eski matematikçiler bu problemi dairenin alanı için genişletmek istemişler ve dairenin alanına eşit alanda olan kareyi çizmeye çalışmışlardır. Bu sorunun çözümü, π sayısı ile ilgilidir. π sayısı, doğalsayı ya da rasyonel sayı olsaydı, dairenin alanına eşit alanda olan bir kare bulunabilirdi.

π sayısının, doğalsayı ya da rasyonel sayı olmadığı 1882 yılında Alman matematikçisi **Lindemann** tarafından ispatlanmıştır. Uygarlık dünyasını iki bin yıl uğraştıran bu probleme, böylece kesin bir yanıt verilmiştir.

Hesaplarda, π sayısı yerine $\frac{22}{7}$; 3,14 ya da 3,1416 yaklaşık değerleri kullanılır.

Uygulamalar :

1. Yarıçapı r = 2,5 cm. olan çemberin çevresini ve dairenin alanını hesaplayınız.

Çözüm :

Çemberin çevresi :

$$\mathcal{C} = 2\,\pi\,r = 2 \times 3{,}1416 \times 2{,}5 = 15{,}708 \text{ cm.} \quad \text{olur.}$$

Dairenin alanı : $\mathcal{A} = \pi \times r^2 = 3{,}1416 \times 2{,}5 \times 2{,}5$

$$\mathcal{A} = 19{,}635 \text{ cm}^2 \quad \text{dir.}$$

2. Merkezi O ve yarıçapı r = 2 cm. olan bir çemberin 30° lik $\widehat{AB}$ yayının uzunluğunu bulunuz.

Çözüm :

$s(\widehat{AOB}) = 30°$ alınırsa $s(\widehat{AB}) = 30°$ olur. Bu çemberin çevresi $\mathcal{C} = 2\,\pi\,r$ ile bellidir. $\pi = 3{,}14$ için,

$$\mathcal{C} = 2 \times 3{,}14 \times 2 = 12{,}56 \text{ cm.}$$

olur. Bu değer, verilen çemberde 360° lik yayın uzunluğudur.

1° lik yayın uzunluğu : $\frac{12{,}56}{360}$ cm. ;

30° lik yayın uzunluğu : $\frac{12{,}56}{360} \times 30 = \frac{12{,}56}{12} = 1{,}04$ cm.

olarak bulunur.

ALIŞTIRMALAR

A Grubu :

1. Birbirine dik olmayan x'x ve y'y doğruları veriliyor. x'x doğrusu üzerinde A ve B noktaları alınıyor. A , B noktalarından geçen ve merkezi y'y doğrusu üzerinde olan çemberi çiziniz.

2. Verilen bir A noktasından geçen ve yarıçapı r = 3 cm. olan çemberlerin merkezlerinin oluşturduğu kümeyi belirtiniz.

3. Uzunluğu 4 cm. olan bir [AB] doğru parçası veriliyor. A ve B noktalarından geçen ve yarıçapı r = 3 cm. olan çemberi çiziniz.

4. 70° lik $(\widehat{xOy})$ açısını ve bunun [Oz açıortayını çiziniz. $M \in [Oz$ alınız. Bu M noktasından [Ox ve [Oy ışınlarına sıra ile [MH] ve [MK] dikmelerini çiziniz. Ölçerek $|MH| = |MK|$ olduğunu gösteriniz.

Bu açıortay üzerinde alınan her noktanın [Ox ve [Oy ışınlarına olan uzaklıkları eşit olur mu? Bu durumda $(\widehat{xOy})$ açısının açıortayını bir noktalar kümesi olarak belirtiniz.

5. Uzunluğu $|AB| = 7$ cm. olan doğru parçası veriliyor. (A ; 3 cm.) ve (B ; 4 cm.) çemberlerini çiziniz. Her çember, bir noktalar kümesi olduğuna göre, bu iki kümenin kesişimini bulunuz.

6. Uzunluğu $|AB| = 4$ cm. olan doğru parçası veriliyor. (A ; 3 cm.) ve (B ; 1 cm.) çemberlerini çiziniz. Bu çemberlerin kesişim kümesi nedir?

7. Uzunluğu $|AB| = 2$ cm. olan doğru parçası veriliyor. (A;4 cm.) ve (B;1 cm.) çemberlerini çiziniz. Bu çemberlerin kesişim kümesi nedir?

8. Uzunluğu $|AB| = 7$ cm. olan bir doğru parçası veriliyor.

a) A noktasından 5 cm. uzaklıkta bulunan noktalar kümesini belirtiniz.

b) B noktasından 4 cm. uzaklıkta bulunan noktalar kümesini belirtiniz.

c) A dan 5 cm. ve B den 4 cm. uzaklıkta olan noktalar var mıdır?

9. Yarıçapı $r = 3{,}5$ cm. olan çemberin çevresini ve dairenin alanını bulunuz.

10. Çevresi 25,12 cm. olan çemberin yarıçapını bulunuz. Bu dairenin alanı kaç cm^2 dir? ($\pi = 3{,}14$ tür.)

B Grubu :

11. Çevresi 3,14 cm. olan bir çember var. Yarıçapı bu çemberin yarıçapının 3 katı olan çemberin çevresini ve dairenin alanını hesaplayınız.

12. Ç (O;4 cm.) çemberi veriliyor. Bu çemberde 45° lik $(\widehat{AOB})$ merkez açısı çiziliyor. $\widehat{AB}$ yayının uzunluğunu hesaplayınız.

13. Daire şeklindeki bir pistin yarıçapı 45 m. dir. Bir bisikletli 14 tur yapıyor. aldığı yol kaç metredi?

14. Bir araba lâstiğinin çapı 60 cm. dir. Araba 10 km. yol aldığı zaman arabanın tekerleği kaç devir yapmıştır?

15. Bir çemberin 45° lik bir yayının uzunlukğu 15,7 cm. dir. Bu çemberin yarıçapını hesaplayınız. Dairenin alanını bulunuz.

KARIŞIK PROBLEMLER

A Grubu :

1. Uzunluğu $|AB| = 4$ cm. olan bir doğru parçası veriliyor. A , B noktalarından geçen ve yarıçapı 3 cm. olan çemberi çiziniz.

2. Yarıçapı 3 cm. ve merkezi O olan bir çember çiziniz. Bu çemberde, ölçümleri 30° olan $(\widehat{COD})$ ve $(\widehat{EOF})$ merkez açılarını çiziniz.

a) $\widehat{CD}$ ve $\widehat{EF}$ yaylarının uzunlukları nedir?

b) Ölçme yöntemi ile, $|CD| = |EF|$ olduğunu sağlayınız.

c) Ölçme yöntemi ile, çemberin O merkezinin bu [CD] ve [EF] kirişlerine olan uzaklıklarının eşit olduğunu gösteriniz.

3. Merkezi O ve yarıçapı 25 mm. olan bir çemberde, 60° lik $(\widehat{AOB})$ ve 45° lik $(\widehat{COD})$ merkez açıları alınıyor.

a) Bu açıların gördüğü yayları hesaplayınız.

b) Bu yaylarla ilgi [AB] ve [CD] kirişlerinden hangisi daha uzundur? Ölçme yöntemiyle gösteriniz.

c) Çemberin O merkezinin [AB] ve [CD] kirişlerine olan uzaklıkları sıra ile h ve k olsun. Ölçme yöntemi ile $h < k$ olduğunu gösteriniz.

4. Bir çember üzerinde 60° lik $\widehat{AB}$ alınıyor. Bu yayın uzunluğu 3,14 cm. dir.

a) Bu çemberin uzunluğu ne kadardır?

b) Bu çemberin yarıçapının uzunluğu nedir?

c) Bu çembersel bölgenin (**dairenin**) alanını bulunuz. ($\pi = 3{,}14$ alınacaktır.)

B Grubu :

5. Bir kenarı 4 cm. olan bir kareyi çiziniz. Sonra bu karenin dört köşesinden geçen çemberi çiziniz.

a) Karenin alanını hesaplayınız.

b) Ölçerek çemberin çapını bulunuz.

c) Çemberin uzunluğunu ve dairenin alanını hesaplayınız.

6. Çapı $|BC| = 6$ cm. olan Ç (O;3 cm.) çemberini çiziniz. $s(\widehat{COA}) = 60°$ alınız (49. Şekil).

a) s $(\widehat{CBA}) = 30°$ olduğunu gösteriniz

b) s $(\widehat{BAC}) = 90°$ olduğunu gösteriniz.

7. "50. şekilde" dik kenarları 4 cm., 3 cm. olan bir dik üçgen görüyorsunuz.

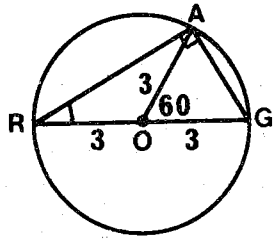
a) Bu dik üçgenin [BC] hipotenüsünün uzunluğunu ölçünüz. Bu uzunluk 5 cm. olur mu?

b) C köşesinden [AB] ve B köşesinden [AC] kenarına paraleller çizerek bir dikdörtgen meydana getiriniz.

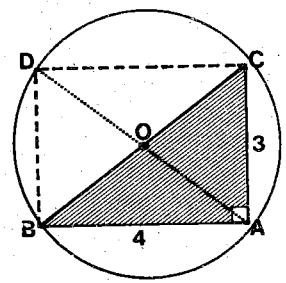
c) Elde ettiğiniz dikdörtgenin köşelerinden geçen bir çember çiziniz. Çemberin merkezi nerede bulunur? Bu çemberin yarıçapını hesaplayınız.

d) Çemberin çevresinin uzunluğunu bulunuz.

e) Dairenin alanını hesaplayınız.



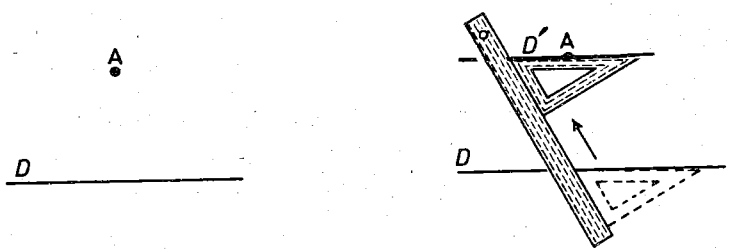
49. Şekil



50. Şekil

Yol gösterme :

Bir doğruya dışındaki bir noktadan gönye ve cetvel yardımıyle paralel doğrunun nasıl çizileceğini "51. şekilde" görüyorsunuz.



51. Şekil

C Grubu :

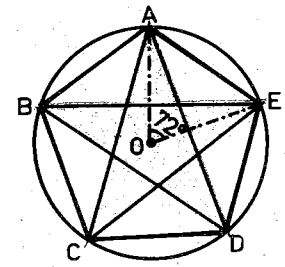
8. $Ç\,(O\,,\,r)$ ve $Ç'\,(O'\,,\,r')$ çemberleri veriliyor $(r = 3$ cm.; $r' = 2\,r)$:

a) Bu çemberlerin çevrelerinin uzunlukları arasındaki oranı bulunuz.

b) Bu dairelerin alanları arasındaki oranı bulunuz.

9. Boyu 9 cm., eni 6,7 cm. olan bir dikdörtgen var. Çevresinin uzunluğu, bu dikdörtgenin çevresinin uzunluğuna eşit olan çemberin çapını hesaplayınız ($\pi = 3{,}14$ tür).

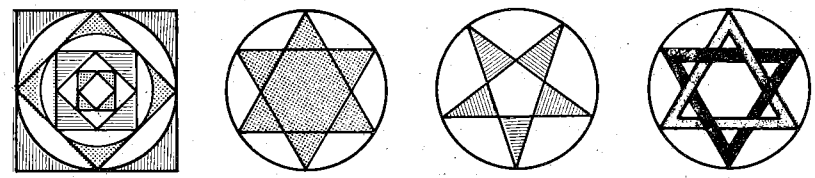
10. Yarıçapı 2,5 cm. olan bir çember çiziniz. İletki ile bu çemberde s $(\widehat{AOB}) = 72°$ lik bir merkez açı çiziniz. Sonra pergelin ayaklarının arasını [AB] kirişinin uzunluğu kadar açınız ve çemberin [AB] ye eş [BC], [CD], [DE], [EA] ardışık kirişlerini çiziniz. Böylece bir düzgün beşgen elde edersiniz.



52. Şekil

11. Yarıçapı 4 cm. olan bir çember çiziniz. Sonra çemberi 5 eş parçaya bölünüz. Bölüm noktalarını şekilde görüldüğü gibi birleştiriniz. Bir yıldız (Yıldızıl beşgen) bulursunuz (52. şekil).

12. « 53. şekilde » verilen süslemeleri inceleyerek siz de defterinize bunları yapınız.



53. Şekil

5-7. SİLİNDİR, ALANI VE HACMİ

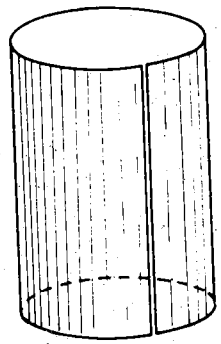
1. Silindir

Dikdörtgen biçiminde bir kâğıt kesiniz. Bu kâğıdı uzunluğu boyunca kıvırınız ve karşı karşıya getirdiğiniz kısa kenarları birbiri üzerine yapıştırınız. Elde ettiğiniz şekil bir **silindir yüzeyidir** (54. şekil).

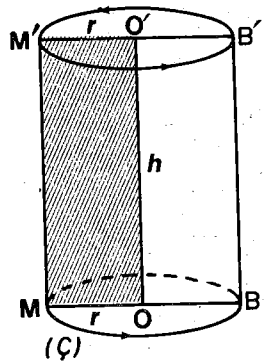
Dikdörtgen biçiminde ikinci bir kağıt kesiniz. Bu kağıdı, bu kez kısa kenarları boyunca kıvırınız. Yine bir **silindir yüzeyi** elde etmiş olursunuz.

Tanım :

OMM′O′ dikdörtgensel bölgesini [OO′] kenarı dolayında döndürelim. Elde edilen şekil, uzayda bir noktalar kümesidir. Bu şekle silindir denir (55. Şekil)



54. Şekil



55. Şekil

Silindirin alt ve üst tabanları, yarıçapları

$$|OM| = |O'M'| = r$$

olan eş iki dairedir.

Dikdörtgensel bölgenin [MM′] kenarı silindirin **yan yüzünü** oluşturur. Bu doğru parçasına silindirin **anadoğrusu** denir. [OO′] doğru parçası silindirin **ekseni ;**

$$|OO'| = |MM'| = h$$

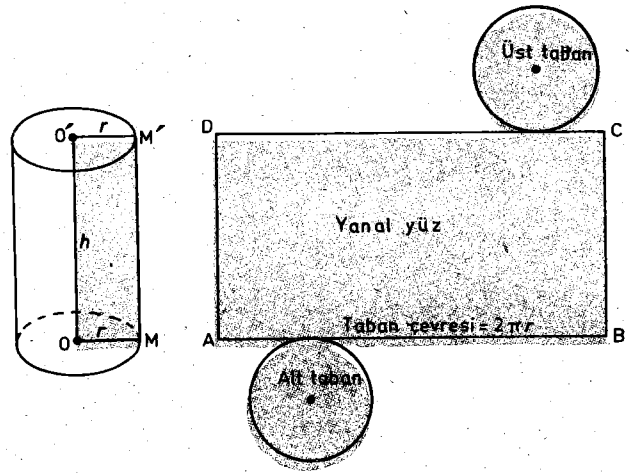
silindirin **yüksekliğidir.**

"56. şekilde" bir silindirin **açınımını** görüyorsunuz.

Silindirin yanal yüzünün açılmış şekli ABCD dikdörtgenidir. | AB | uzunluğu silindirin taban çevresinin uzunluğuna, | AD | genişliği de silindirin yüksekliğine eşit olur.

2. Silindirin Yanal Yüzünün Alanı

Tabanının yarıçapı r = 4 cm., yüksekliği h = 6 cm. olan bir silindir veriliyor.



56. Şekil

Bu silindirin açınımını "56. şekilde" görüyorsunuz. Bu Silindirin yanal alanı ABCD dikdörtgeninin alanıdır.

| AB | = 2 π × 4 = 8 π cm. dir. π = 3,14 alınırsa,

| AB | = 25,12 cm. olur.

Silindirin yüksekliği, dikdörtgenin [AD] kenarının uzunluğuna eşittir. Buna göre,

Silindirin yanal alanı :

$$\mathcal{Y} = 25{,}12 \times 6 = 150{,}72 \text{ cm. dir.}$$

Silindirin taban yarıçapı r, yüksekliği h, yanal alanı $\mathcal{Y}$ ile gösterilirse, yanal alan :

$$\mathcal{Y} = 2\,\pi \times r \times h$$

ile bellidir.

Silindirin bütün alanı $\mathcal{B}$ ile gösterilirse,

$$\mathcal{B} = 2\,\pi\,r \times h + 2\,\pi\,r^2$$

yazılır.

Çarpmanın toplama üzerine dağılma özeliği gereğince, bu formülü,

$$\mathcal{B} = 2\,\pi\,r\,(h + r)$$

biçiminde yazabiliriz.

Uygulamalar :

1. Bir silindirin tabanının yarıçapı r = 3 cm., yüksekliği 6 cm. dir. Bu silindirin yanal yüzünün alanını ve bütün alanını bulunuz.

Çözüm :

Yanal yüzünün alanı :

$$\mathcal{Y} = 2\ \pi \times 3 \times 6 = 36 \times \pi\ cm^2 \quad \text{olur.}$$

$$\pi = 3{,}14 \quad \text{alınırsa} \quad \mathcal{Y} = 113{,}04\ cm^2 \quad \text{bulunur.}$$

Silindirin bütün alanı :

Silindirin tabanlarının alanları toplamı

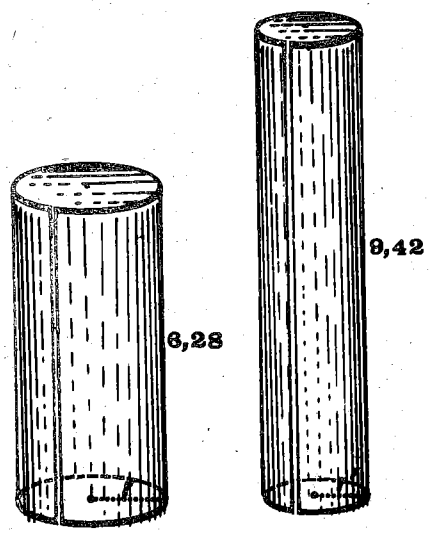
$$2\ \pi\ r^2 = 2\ \pi \times 9 = 18 = 56{,}52\ cm^2$$

dir. ($\pi = 3{,}14$ alındı). Buna göre bütün alan :

$$\mathcal{B} = 113{,}04 + 56{,}52 = 169{,}56\ cm^2$$

olur.

2. Uzunluğu 9,42 cm. genişliği 6.28 cm. olan dikdörtgen biçiminde iki karton alınıyor. Birinci karton uzunluğu, İkinci karton da genişliği boyunca kıvrılıyor ve tabanları daire biçiminde silindirler yapılıyor. Bu silindirlerin tabanlarının yarıçaplarını hesaplayınız.



57. Şekil

Çözüm :

Karton uzunluğu boyunca kıvrılarak silindir yapıldığı zaman, bu silindirin tabanının çevresi 9,42 cm. dir.

Buna göre :

$$2\ \pi\ r = 9{,}42$$

eşitliği yazılır. Buradan

$$r = \frac{9{,}42}{2\,\pi}$$

bulunur. $\pi = 3{,}14$ olursa

$$r = \frac{9{,}42}{2 \times 3{,}14} = \frac{3}{2}\ cm.$$

bulunur (57. şekil–a).

Karton, genişliği boyunca kıvrıldığı zaman elde edilen silindirin tabanının yarıçapı :

$$2\ \pi\ r' = 6{,}28$$

ile bellidir. Buradan,

$$r' = \frac{6{,}28}{2\ \pi}$$

bulunur. $\pi = 3{,}14$ için

$$r' = \frac{6{,}28}{2 \times 3{,}14} = \frac{6{,}28}{6{,}28} = 1\ cm.$$

olur (57. şekil–b).

3. Silindirin Hacmi

Silindir biçimindeki bir kabı su ile doldurunuz. Sonra bu suyu, dereceli kaba boşaltarak hacmini ölçünüz. Silindir tabanının yarıçapını ve yüksekliğini ölçünüz ve tabanının alanını bulunuz. Bu alanı yükseklik ile çarpınız. Bulduğunuz sonuç ile suyun hacmini gösteren sayıyı karşılaştırınız. Bunların birbirine eşit olduğunu göreceksiniz.

Örnek :

Tabanının yarıçapı 3 cm. yüksekliği 8 cm. olan bir silindir veriliyor. Bu silindirin hacmini bulunuz.

Bu silindirin tabanı, yarıçapı 3 cm. olan bir dairedir. Bu dairenin alanı :

$$\mathcal{C} = \pi \times 3^2 = 9\ \pi\ cm^2 \quad \text{dir.}$$

$\pi = 3{,}14$ alınırsa,

$$\mathcal{C} = 28{,}26\ cm^2 \quad \text{olur.}$$

Silindirin yüksekliği 8 cm. olduğundan hacmi :

$$\mathcal{H} = 28{,}26 \times 8 = 226{,}08\ cm^3 \quad \text{olur.}$$

Öyleyse silindirin hacminin nasıl bulunacağını sözle şöyle anlatırız :

Silindirin hacmi, taban alanı ile yüksekliğinin çarpımına eşittir.

Tabanının yarıçapı r ve yüksekliği h uzunluğunda olan bir silindirin hacminin ölçümü de $\mathcal{H}$ ile gösterilirse,

$$\mathcal{H} = \pi\ r^2\ h$$

eşitliği yazılır.

Tabanının yarıçapı $r = 3$ cm., yüksekliği $h = 5$ cm. uzunluğunda olan silindirin hacmi :

$\mathcal{H} = \pi \times 9 \times 5 = 45\ \pi\ cm^3$ tür. $\pi = 3{,}14$ alınırsa,

$\mathcal{H} = 141{,}3\ cm^3$ bulunur.

ALIŞTIRMALAR

A Grubu :

1. Yüksekliği taban çapının uzunluğunun iki katına eşit bir silindir var; $r = 2{,}5$ cm. olduğuna göre, bu silindirin :

a) Yanal alanını hesap ediniz.

b) Bütün alanını bulunuz.

c) Hacmini hesaplayınız.

2. Bir silindir tabanının yarıçapı $r = 4$ cm. dir. Silindirin yüksekliği taban yarıçapının üç katıdır. Bu silindir açıldığı zaman elde edilen dikdörtgenin alanı kaç cm^2 dir?

3. Bir silindirin bütün alanı $63{,}8\ cm^2$ ve tabanının yarıçapı $r = 2$ cm. dir. Bu silindirin yüksekliğini hesap ediniz ($\pi = 3{,}14$).

B Grubu :

4. Tabanının yarıçapı 2 cm. ve hacmi 44 cm^3 olan bir silindir veriliyor.

a) Bu silindirin yüksekliğini hesap ediniz.

b) Silindirin yanal yüzünün alanını bulunuz.

c) Silindirin bütün alanını hesaplayınız. $\left(\pi = \frac{22}{7}\ \text{dir.}\right)$

5. Bir kenarı 2 cm. olan karesel bölge, kenarlarından biri dolayında döndürülüyor. Elde edilen silindirin bütün alanını ve hacmini hesaplayınız.

Okuma Parçası

Geometri İle İlgili Tarih Bilgisi :

Eski insanların yaşayışları çok sade, bilgileri azdı. Ama, çevrelerindeki eşyaların biçimlerini, büyüklüklerini anlamak, boyutlarını ölçmek için pratik yöntemleri vardı.

Eski coğrafya bilgini **Strabon**'a göre geometri **Mısır**'da doğmuştur. O zamanlar, **Nil** Nehri taşınca kıyılardaki topraklar sular altında kalırdı. **Eski Mısırlılar,** sular çekildikten sonra topraklarını sade geometri şekilleri yardımı ile ölçerler ve sınırlarını bulurlardı.

EUCLIDE

Bugün bizce bilinen en eski geometri kitabı, Mısırlılardan kalma bir **Papirüs** yaprağıdır. Bu yaprakta alan ve hacimleri hesaplamaya yarayan pratik formüllere rastlanmaktadır. Milâttan 3 000 yıl önce Mısırda yapılan **Piramitler**, bu memlekette pratik geometrinin ne kadar geliştiğini göstermeye yeter.

Babil'de de pratik geometri yöntemleri uygulanırdı. **Kaldeliler**, düzgün altıgenin bir kenarının uzunluğunun çemberin yarıçapına eşit olduğunu biliyorlardı. Bir çemberin ve bir yılın 360 eşit parçaya bölünmesi **kaldeli Astronomi** bilginleri tarafından biliniyordu.

Eski Yunanlılar, yüzyıllar boyunca insanların deneme ve ölçme yöntemleri yardımiyle kazandıkları pratik geometri bilgilerini düzenleyerek geometri şekillerini incelemişlerdir.

İlk geometri kitabı, Milattan 300 yıl önce ünlü Yunan matematikçisi **Öklid** (Euclide) 'in **Elemanlar** adıyla yazdığı kitaptır. **Öklid** bu kitabında geometrinin dayandığı temel ilkeleri ortaya koymuştur. O'nun bu yapıtı, değerini yitirmeden zamanımıza kadar gelmiştir.

KENDİMİZİ DENEYELİM

TEST SORULARI

1. Düzlemde değişmeyen bir O noktası veriliyor. $|OM| = 4$ cm. koşuluna uygun olan M noktalarının oluşturduğu küme nedir?

☐ **a)** Merkezi O ve yarıçapı 4 cm. olan çemberdir.

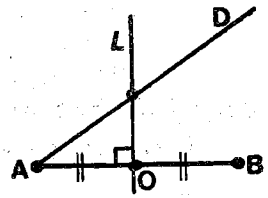
☐ **b)** Merkezi O ve yarıçapı 4 cm. olan çemberin içidir.

☐ c) Merkezi O ve yarıçapı 4 cm. olan dairedir.

☐ d) Merkezi O ve yarıçapı 4 cm. olan çemberin dış bölgesidir.

☐ e) Bunlardan hiçbiri.

2. A ve B noktalarından geçen ve merkezi [AD ışını üzerinde bulunan kaç tane çember çizebilirsiniz (58. şekil)?



58. Şekil

☐ a) İki çember ; ☐ b) Bir çember ;

☐ c) Üç çember ; ☐ d) Dört çember ;

☐ e) Hiç çember çizilemez.

3. Merkezi O ve yarıçapı 3 cm. olan (Ç) çemberi veriliyor. O noktasından 2 cm. uzaklıkta bir D doğrusu alınıyor. Aşağıdaki anlatımlardan hangisi doğrudur?

☐ a) D doğrusu bu çemberi iki noktada keser.

☐ b) D doğrusu bu çemberi bir noktada keser.

☐ c) D doğrusu bu çemberi kesmez.

☐ d) D doğrusu bu çembere teğettir.

☐ e) D doğrusu bu çemberi üç noktada keser.

4. D bir doğruyu, (Ç) bir çemberi, A da bir noktayı gösteriyor.

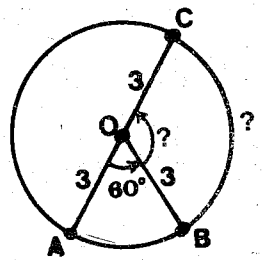
$$D \cap (Ç) = \{A\}$$

olduğuna göre, D doğrusu şunlardan hangisidir?

☐ a) Kiriştir. ☐ b) Çaptır. ☐ c) Teğettir.

☐ d) Kesendir. ☐ e) Yarıçaptır.

5. "59. şekilde" $\overset{\frown}{BC}$ yayının ölçümü kaç derecedir?



59. Şekil

☐ a) 60° ; ☐ b) 90° ; ☐ c) 120° ;

☐ d) 100° ; ☐ 110° .

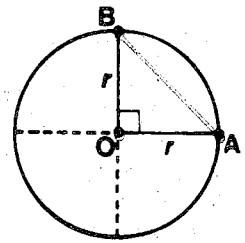
6. "59. şekilde" $\overset{\frown}{BC}$ yayının uzunluğu kaç birimdir? ($\pi = 3{,}14$)

☐ a) 6,28 birim ; ☐ b) 3,14 birim ;

☐ c) 6 birim ; ☐ d) 3 birim ;

☐ e) Bunlardan hiçbiri.

7. "60. şekilde" s ($\widehat{AOB}$) = 90° dir. [AB] kirişi çemberin içine çizilen hangi düzgün çokgenin bir kenarı olur?



60. Şekil

☐ a) Eşkenar üçgenin ; ☐ Karenin ;

☐ c) Düzgün altıgenin ; ☐ d) Düzgün beşgenin ; ☐ e) Hiçbiri.

8. "60. şekilde" $\overset{\frown}{AB}$ yayının uzunluğu 3,14 cm. olduğuna göre, bu çemberin yarıçapı kaç cm. dir? ($\pi = 3{,}14$ alınacaktır.)

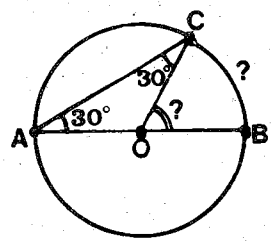
☐ a) 2 cm. ; ☐ b) 4 cm. ; ☐ c) 1 cm. ; ☐ d) 3,14 cm.;

☐ e) Hiçbiri.

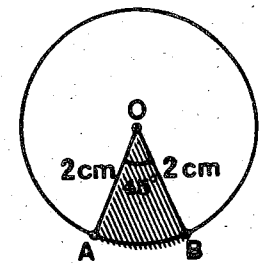
9. "61. şekilde" gördüğünüz $\overset{\frown}{BC}$ yayının ölçümü kaç derecedir?

☐ a) 30° ; ☐ b) 60° ; ☐ c) 50° ; ☐ d) 40° ;

☐ e) Hiçbiri.



61. Şekil



62. Şekil

10. "62 şekilde" görülen (AOB) daire kesmesinin alanı şunlardan hangisidir? ($\pi = 3{,}14$ alınacaktır).

☐ a) 1,57 cm² ; ☐ b) 2 cm² ; ☐ c) 3,14 cm² ;

☐ d) 1,56 cm² ; ☐ e) Hiçbiri.

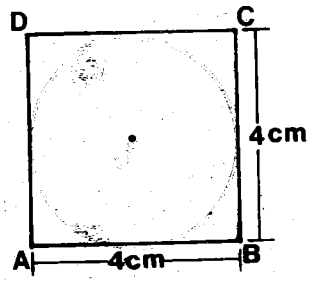
11. Çevresinin uzunluğu 37,68 cm. olan bir çemberin 90° lik yayının uzunluğu kaç cm. dir? ($\pi = 3{,}14$ alınacaktır).

☐ a) Verilenlerle hesaplanamaz ; ☐ b) 6,28 cm. ;

☐ c) 3,14 cm. ; ☐ d) 18,84 cm. ; ☐ e) 9,42 cm.

12. "63. şekilde" görülen çemberin yarıçapı kaç cm. dir?

☐ **a)** 4 cm.; ☐ **b)** 2 cm.; ☐ **c)** 3 cm.
☐ **d)** 1 cm.; ☐ **e)** 5 cm.



63. Şekil

13. Yanal alanı 62,8 cm² ve yüksekliği 5 cm. olan silindirin tabanının yarıçapı kaç cm. dir? ($\pi = 3{,}14$ alınacaktır.)

☐ **a)** 4 cm. ; ☐ **b)** 2 cm. ; ☐ **c)** 5 cm.
☐ **d)** 3,14 cm. ; ☐ **e)** 6,28 cm.

14. Tabanının çevresi 31,4 cm. ve yüksekliği 10 cm. olan silindirin hacmi kaç cm³ tür? ($\pi = 3{,}14$ alınacaktır.)

☐ **a)** 78,5 cm³ ; ☐ **b)** 7 850 cm³ ; ☐ **c)** 785 cm³ ;
☐ **d)** 775 cm³ ; ☐ **e)** Hiçbiri.

15. Hacmi 1 570 cm³ olan bir silindirin yüksekliği 5 cm. dir. Bu silindirin tabanının yarıçapı kaç cm. dir? ($\pi = 3{,}14$ alınacaktır.)

☐ **a)** 5 cm. ; ☐ **b)** 7,5 cm. ; ☐ **c)** 3,14 cm. ;
☐ **d)** 10 cm. ; ☐ **e)** 100 cm.

16. $\widehat{ABC}$ bir dik üçgendir. $\widehat{A}$ açısı dik açıdır. Bu üçgenin köşelerinden geçen çemberin merkezi aşağıdaki noktalardan hangisidir?

☐ **a)** A ; ☐ **b)** B ; ☐ **c)** [BC]'nin orta noktası,
☐ **d)** [AC]'nin orta noktası ; ☐ **e)** [AB]'nin orta noktası.

17. $Ç(O;r)$ ve $Ç'(O';r')$ çemberleri birbirini A ve B noktalarında kesiyor. Aşağıdaki anlatımlardan hangisi doğrudur?

☐ **a)** $Ç(O;r) \cup Ç'(O';r') =$ bir çemberdir;
☐ **b)** $Ç(O;r) \cap Ç'(O';r') = [AB]$;
☐ **c)** $Ç(O;r) \cap Ç'(O';r') = \{A;B\}$;
☐ **d)** $Ç(O;r) \cap Ç'(O';r') = [AB[$;
☐ **e)** $Ç(O;r) \cap Ç'(O';r') =$ AB doğrusu.

18. A, B, C doğrusal üç noktadır ve B noktası, A, C noktaları arasındadır. Aşağıdaki bağıntılardan hangisi doğrudur?

☐ **a)** $|AB| = |AC| + |BC|$; ☐ **b)** $|AB| = |BC| - |AC|$;
☐ **c)** $|AC| = |AB| + |BC|$; ☐ **d)** $|BC| = \dfrac{|AB| + |AC|}{2}$;
☐ **e)** Hiçbiri.

19. AB doğrusu ile $Ç(O;r)$ çemberinin ortak noktaları A ve B dir. Bu çemberin çevrelediği daire $D(O;r)$ ile gösteriliyor. Aşağıdaki önermelerden hangisi doğrudur.

☐ **a)** $AB \cap D(O;r) = \{A, B\}$; ☐ **b)** $AB \cap D(O;r) = AB$;
☐ **c)** $AB \cap D(O;r) = [AB]$; ☐ **d)** $AB \cap D(O;r) =]AB[$;
☐ **e)** Hiçbiri.

20. Yarıçapı R = 3 cm. olan bir çemberde 30° lik merkez açısının karşısındaki yayın uzunluğu nedir? ($\pi = \frac{22}{7}$ alınacak.)

☐ **a)** $\frac{3}{4}$ cm. ; ☐ **b)** $\frac{7}{5}$ cm. ; ☐ **c)** $\frac{11}{7}$ cm. ;
☐ **d)** $1\frac{1}{7}$ cm. ; ☐ **e)** $2\frac{1}{7}$ cm.

6. BÖLÜM — DENKLEMLER

Konunun Ayrıntıları

6–1. Sayı İfadelerini Yazma
6–2. Sayı Önermelerini Yazma
6–3. Çözüm Kümesinin Bulunması
6–4. Eşitsizliklerin Çözümü
6–5. İki Bilinmeyenli Sayı Önermeleri

6–1. SAYI İFADELERİNİ YAZMA

Örnekler :

1. a) $3 + 5 = \ldots$
   b) $6 \times 4 - 1 = \ldots$
   c) $6 \times 7 + 4 = \ldots$
   d) $12 : 2 + 5 = \ldots$

sayı ifadelerinin değerlerini bulalım :

a) $3 + 5 = 8$; **b)** $6 \times 4 - 1 = 24 - 1 = 23$;

c) $6 \times 7 + 4 = 42 + 4 = 46$;

d) $12 : 2 + 5 = 6 + 5 = 11$

dir.

Bu ifadelerde çeşitli sayı işlemlerini görüyorsunuz. Bu işlemler yapıldıktan sonra her ifadenin belli bir sayı değeri bulunmuştur.

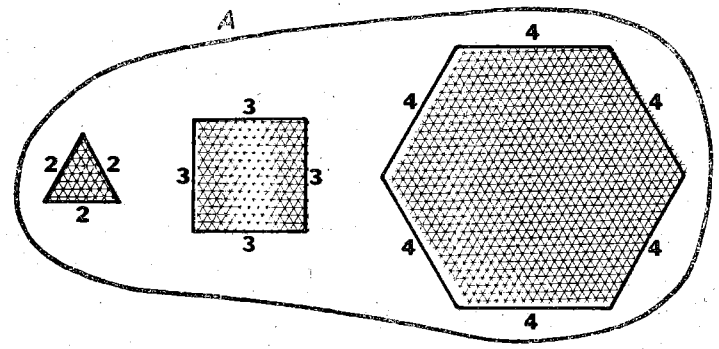
2. Eşkenar üçgen, kare ve düzgün altıgenden meydana gelen bir A kümesi göz önüne alalım (1. şekil). Bu kümedeki her elemanın bir kenarının uzunluğuna gerçek sayılar kümesinin bir elemanını eşleştirebiliriz. Sözgelimi, eşkenar üçgenin bir kenarının uzunluğu 2 cm.; kare ve düzgün altıgenin kenarlarının uzunlukları da 3 cm. ve 4 cm. olsunlar. Bu ölçülere göre A kümesinde bulunan şekillerin çevrelerinin uzunlukları :

Eşkenar üçgende : 3×2 cm. $= 6$ cm. ;

Karede : 4×3 cm. $= 12$ cm. ;

Düzgün altıgende : 6×4 cm. $= 24$ cm.

olur.



1. Şekil

Eşkenar üçgenin bir kenarının uzunluğu 5 cm. olsaydı, bu üçgenin çevresinin uzunluğu

$$3 \times 5 \text{ cm.} = 15 \text{ cm.}$$

olurdu.

Eşkenar üçgenin bir kenarının uzunluğunu belirten sayı a ile gösterilirse, çevresinin uzunluğu $3 \times a$ olur. Bu da kısaca $3a$ şeklinde yazılır. Böylece eşkenar üçgenin çevresinin uzunluğu genel bir biçimde anlatılmış olur.

Bunun gibi, karenin ve düzgün altıgenin birer kenarlarının uzunluklarını gösteren sayılar b ve c olursa, çevrelerinin uzunlukları, genel olarak,

$$Ç = 4b \quad \text{ve} \quad Ç = 6c$$

biçiminde anlatılır.

Soru :

Aşağıda eşkenar üçgen, kare ve düzgün altıgenin birer kenarının uzunlukları veriliyor. Çevrelerinin uzunluklarını bulunuz. ($Ç$, çevre uzunluğunu gösteriyor.)

a	= 3 a	b	= 4 b	c	= 6 c
5 cm.	=15cm.	4 cm.	=16 cm.	2 cm.	=12 cm.
2 cm.	.....	2,5 cm.	.....	3,5 cm.	.....
$1\frac{1}{3}$ cm.	.....	$2\frac{1}{3}$ cm.	.....	$1\frac{3}{4}$ cm.	.....

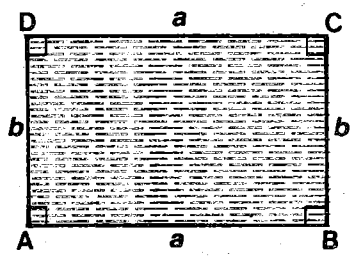
3. Aşağıda görülen dikdörtgenin kenarlarının üzerine, uzunlukları yazılmıştır. Çevresinin uzunluğunu ve alanını bulalım :

Dikdörtgenin Çevresinin Uzunluğu

$$Ç = a + b + a + b$$

ya da toplamanın değişme ve birleşme özeliklerine göre,

$Ç = (a + a) + (b + b) = 2a + 2b$ bulunur.



2. Şekil

Dikdörtgenin alanı da

$$\mathcal{A} = a \times b \quad \text{dir.}$$

Soru :

Aşağıdaki çizelgede a ve b dikdörtgenin boyutlarını; $\mathcal{A}$ alanını $Ç$ de çevresinin uzunluğunu gösteriyor. Boş yerleri doldurunuz :

a	5 cm.	7 cm.	10 cm.	... ?	... ?	3,5 cm.
b	3 cm.	2 cm.	... cm.	10 cm.	6 cm.	... cm.
$\mathcal{A}$	15 cm²	... cm²	40 cm²	... cm²	... cm²	14 cm²
$Ç$	16 cm.	... cm.	... cm.	60 cm.	$24\frac{2}{5}$ cm.	... cm.

4. Bir kenarının uzunluğu a olan bir küpün bütün alanını ve hacmini veren ifadeleri yazalım; a = 3 cm. için bütün alanı ve hacmi bulalım :

Küpün altı yüzü vardır ve her yüzü, bir kenarı a uzunluğunda olan karedir. Buna göre,

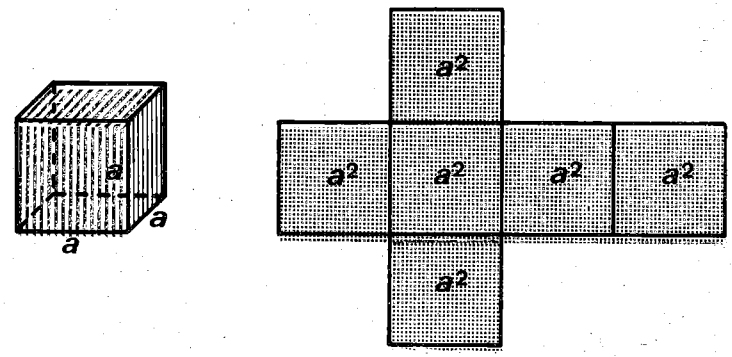
Küpün bütün alanı : $\mathcal{B} = 6\ a^2$ dir.

Küpün hacmi : $\mathcal{H} = a \times a \times a = a^3$ tür.

a = 3 cm. için $\mathcal{B} = 6 \times 3^2 = 6 \times (3 \times 3) = 6 \times 9 = 54$ cm²

$\mathcal{H} = 3 \times 3 \times 3 = (3 \times 3) \times 3 = 9 \times 3 = 27$ cm³

olur (3. şekil).



3. Şekil

5. n bir tamsayı olsun; bu sayının iki katından bir fazla olan sayıyı veren ifadeyi yazalım :

Burada n herhangi bir tamsayı gösterdiğine göre verilen koşula uyan bütün sayılar

$$2n + 1$$

ifadesi ile bellidir. Örnek olarak,

n = 3 için bu sayı : $2 \times 3 + 1 = 7$;

n = —3 için de : $2 \times (-3) + 1 = -6 + 1 = -5$

dir.

6. 5 ile bölündükleri zaman 2 kalanını veren sayıları gösterelim :

Aradığımız sayılardan her biri 5 in katı ile 2 nin toplamına eşittir. Öyleyse, bu sayılar,

$5 \times k + 2$ ya da kısaca $5k + 2$

biçiminde olur. (Burada k bir doğalsayıdır.)

7. 4 ile bölünemeyen sayıların genel şekillerini yazalım :

Bir sayının 4 ile bölünmesinden kalanlar 1 , 2 ya da 3 tür. p bir doğalsayıyı gösterirse 4 ile bölünemeyen sayılar :

$$4p + 1 \ , \quad 4p + 2 \ , \quad 4p + 3$$

ifadelerinden biri ile gösterilir.

8. a ve b ile gösterilen iki gerçek sayının toplamından 1 eksik olan sayıları veren ifadeyi yazalım :

a, b sayılarının toplamı $(a + b)$ dir. Bundan 1 eksik olan tüm sayılar,

$$(a + b) - 1$$

ile gösterilir.

ALIŞTIRMALAR

A Grubu :

1. 3 ile m'nin toplamından 2 fazla olan sayıyı yazınız.

2. a ve b iki gerçek sayıdır $(a, b \in G)$. Bu sayılardan birinin iki katı ile öbürünün arasındaki farktan 1 fazla olan sayıyı yazınız.

3. Bir kenarının uzunluğu 2a olan karenin çevresini ve alanını yazınız.

4. Bir kenarının uzunluğu 3a olan eşkenar üçgenin çevresini gösteriniz.

5. Bir kenarının uzunluğu 2a olan küpün tüm alanını ve hacmini yazınız.

6. Boyutları a, 2a, 3a olan dikdörtgenler prizmasının hacmini yazınız.

7. Köşegenlerinin uzunlukları a ve b olan eşkenar dörtgenin alanını bulunuz.

8. a sayısının küpünden 1 eksik olan sayıyı yazınız.

9. Bir dikdörtgenin uzunluğu a, genişliği uzunluğundan 1 eksiktir. Bu dikdörtgenin çevresini ve alanını yazınız.

B Grubu :

10. $\widehat{ABC}$ ikizkenar ($|AB| = |AC|$) üçgeninin tabanının uzunluğu a cm. dir. Yanal kenarlarından birinin uzunluğu a dan 2 cm. fazladır. Üçgenin çevresini yazınız.

11. Bir dik silindirin tabanının yarıçapı, R yüksekliği 2R dir. Bu silindirin yanal alanını yazınız.

12. İki sayının toplamı 10'dur. Bu sayılardan biri x ile gösterilirse, öbür sayı nasıl yazılır?

13. İki sayının farkı 7'dir. Bu sayılardan küçüğü x ile gösterilirse öbür sayı nasıl yazılır?

14. Bir tamsayının karesinden 1 eksik olan sayıyı gösteriniz.

15. x, y gerçek sayılardır. Bu sayıların toplamından 3 eksik olan sayı nasıl yazılır?

C Grubu :

16. x gerçek sayısının $\frac{2}{3}$ sinin 5 fazlası olan sayıyı yazınız.

17. a ve b iki gerçek sayıdır. a 'nın iki katı ile b 'nin üç katı toplamından 1 eksik olan sayı nasıl yazılır?

18. a bir gerçek sayı olduğuna göre $2a^2 - 1$ sayısını yazı ile belirtiniz.

19. a, b iki gerçek sayıdır. $3a - b + 2$ anlatımını yazı ile belirtiniz.

20. x, $y \in G$ dir. $(x^2 - y^2) + 1$ anlatımını yazı ile belirtiniz.

6–2. SAYI ÖNERMELERİNİ YAZMA

Örnekler :

İzmir Türkiye'nin batısındadır.

At iki ayaklı bir hayvandır.

$3 + 5 = 12 - 4$

$5 > 7$

ifadelerini göz önüne alalım.

Birinci tümce bir **yargıyı** anlatan doğru bir tümcedir.

İkinci tümcede **yargı** vardır, ama bu tümce doğru değildir.

$3 + 5 = 12 - 4$ matematik anlatımı doğrudur.

$5 > 7$ matematik anlatımı yanlıştır.

Bu dört tümceden herbirinde **yargı** olduğu halde bunlardan bir kısmı yanlıştır.

"Bugün maça gidelim"

tümcesinde kesin bir **yargı** fikri yoktur.

"maça gidelim"

dediğimiz zaman kesin olarak gideceğimizi anlatmış olmayız.

Bundan anlaşılıyor ki, konuşma dilimizin kimi tümcelerinde **yargı** fikri vardır ve kiminde de yoktur. İşte böyle, kesin olarak doğru ya da yanlış bir yargıyı anlatan anlamlı tümcelere matematikte **önerme** diyoruz.

Matematikte **eşitlik** ve **eşitsizlikle** anlattığımız ifadeler birer önermedir. Bunlar arasında doğru olanlar bulunduğu gibi doğru olmayanlarda vardır. Aşağıda, doğru ya da yanlış olan matematik önermelerine örnekler gösterilmiştir :

Yanlış Önermeler :	**Doğru Önermeler :**
$2 + 3 = 8 - 1$	$3 + 4 = 10 - 3$
$2 \times 3 < 9 - 4$	$3 \times 4 < 37 - 8$
$36 : 12 = 5$	$28 : 7 = 4$

Uygulamalar :

1. $3 < -4$ önermesi doğru mudur?

Çözüm :

Bu matematik önermesini

'üç sayısı, eski dört sayısından küçüktür"

biçiminde ya da kısaca

'üç küçük eksi dört"

diye okuruz. Bu önerme neden **yanlıştır**?

2. $12 : 3 = 6 - 2$ önermesi doğru mudur?

Çözüm :

$12 : 3 = 4$ ve $6 - 2 = 4$

olduğundan bu önerme **doğrudur.**

3. Aşağıdaki önermelerin doğru ya da yanlış olanlarını gösteriniz :

a) $15 - 7 = 8$; **b)** $12 + 2 \neq 9$; **c)** $21\frac{1}{2} > 21$;

d) $8 > 8$; **e)** $14 : 2 \neq 7$; **f)** $20 + 3 \neq 23$;

g) $2 < 13$; **h)** $5 \times 7 < 38$; **ı)** $7 - 8 > 1$;

j) $13 + 6 < 17$; **k)** $5 + 1 > 0$; **l)** $5 + 3 \geqslant 8$.

Çözüm :

a) $15 - 7 = 8$ önermesini şöyle okuruz :

"Onbeş eksi yedi, sekize eşittir."

Bu önerme **doğrudur**; çünkü 15 ile 7 nin farkı 8 dir. $8 = 8$ yazılır.

b) $12 + 2 \neq 9$ önermesini şöyle okuruz :

"Oniki artı iki, dokuza eşit değildir."

Bu önerme de **doğrudur**; çünkü $12 + 2 = 14$ olduğundan

$$14 \neq 9$$

yazılır.

j) $13 + 6 < 17$ önermesini şöyle okuruz :

"On üç artı altı, on yediden küçüktür."

Bu önerme **yanlıştır**; çünkü $13 + 6 = 19$ dur. $19 < 17$ yazılamaz.

Öbür önermelerin **doğru** ya da **yanlış** olduklarını benzer biçimde gösteriniz.

ALIŞTIRMALAR

A Grubu :

1. Aşağıdaki önermelerde gerekli hesaplamaları yapınız; doğru olup olmadıklarını gösteriniz :

1) $5 + 12 = 31 - 14$;

2) $(3 \times 2) + 4 \neq 2 + 3 + 4$;

3) $3 \times 2 + 6 \times 9 < 48$;

4) $(12 + 3) - (15 : 3) > 7$;

5) $5 \times (2+3) = (5 \times 2) + (5 \times 3)$;

6) $36 + 0 = 36$;

7) $(2 \times 3) + 1 - (12 : 6) < 5$;

8) $\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) \times \frac{2}{5} - 1 = -\frac{1}{2}$;

9) $\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{3}\right) : \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{4} - 1\right) < 3$;

10) $7 \times \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) < -\frac{1}{2}$.

B Grubu :

2. Aşağıdaki önermelerin doğru ya da yanlış olduklarını söyleyiniz :

1) Türkiye Cumhuriyeti'nin ilk Cumhurbaşkanı **Kemal ATATÜRK**'tür.

2) Ankara Türkiye'nin güneyindedir.

3) Türkiye'de Cumhuriyet **1923** yılında kurulmuştur.

4) Mimar Sinan, Yavuz Sultan Selimin zamanında yaşamış ünlü bir mimardır.

5) Türkiye'nin en kalabalık kent'i Ankara'dır.

6) Türkler, Anadolu'ya Ortadoğu'dan gelmişlerdir.

7) Dünya'nın en yüksek dağı Asya'dadır.

8) $2n - 1$ ifadesi çiftsayıyı gösterir (**n**, bir doğalsayıdır.)

9) n ve $n + 1$ ardışık sayıları gösterirler. (**n**, bir tamsayıdır.

10) Bir üçgenin alanı, tabanı ile yüksekliğinin çarpımına eşittir.

6-3. ÇÖZÜM KÜMESİNİN BULUNMASI

1. Açık Önerme

Bir takım önermelerin doğru ya da yanlış olduklarını bilemeyiz. Bu önermelerde, boş bırakılan yerler ya da kesin olarak neyi anlattıkları bilinmeyen işaretler bulunur.

Örnekler :

1. **"Sami ... kulübünde top oynuyor"**

önermesinde boş bırakılan yere yazılacak şeyi bilmedikçe bunun doğru ya da yanlış olduğunu söyleyemeyiz. Bu tümce bir açık önermedir. Bu önerme

"Sami Fenerbahçe kulübünde top oynuyor"

şeklinde söylenirse, Sami'nin bu kulüpte top oynadığı biliniyor demektir.

2. $3 + 5 = \ldots + 2$

sayısal önermesini göz önüne alalım. Bu eşitliğin doğru ya da yanlış olması, noktalarla gösterilen yere konulacak sayıya bağlıdır. Buna göre bu eşitlik de bir **açık önermedir.** Bu önerme,

$$3 + 5 = 6 + 2$$

olarak yazılırsa, doğru olduğu hemen görülür. Aynı önerme,

$$3 + 5 = 7 + 2$$

olarak yazılırsa yanlış olur.

$$3 + \square = 7$$

sayısal önermesinde $\square$, ne gösterdiği bilinmeyen bir işarettir. Bu da açık önermedir. $\square$ nin yerine bir sayı konulacaktır. Bu sayının 4 olduğu kolaylıkla görülüyor.

Gerçekten, çıkarma işleminin tanımına göre,

$$3 + \square = 7 \iff \square = 7 - 3 \iff \square = 4$$

yazılır(*).

Böylece, açık olan önerme,

$$3 + 4 = 7$$

şeklinde kesin olan bir önerme olur. Bu önerme doğrudur.

4. $15 \times \square = 75$

önermesinde $\square$ yerine konulacak sayı belli olmadığına göre bu önermenin doğru ya da yanlış olduğunu söyleyemeyiz. $\square$ nin yerine 2 konulursa $15 \times 2 = 75$ önermesi yanlış olur. Acaba bu önermeyi doğru yapan $\square$ nin değeri var mıdır? Bu değeri bulalım :

Çarpmanın ters işlemi olan bölmenin tanımına göre,

$$15 \times \square = 75 \iff \square = 75 : 15 \iff \square = 5$$

bulunur. Bu durumda önerme $15 \times 5 = 75$ şeklinde yazılır. Bu önermenin doğru olduğu görülüyor.

İşte böyle, doğru ya da yanlış olduğu bilinmeyen önermelere **açık önerme** adını veriyoruz.

2. Denklem

Matematikte, $3 + \square = 7$ biçimindeki açık önermeye **denklem** denir. Denklemde bilinmeyenin yerine konulacak sayıları bulmaya **denklemi çözmek** deriz. Bu sayıların oluşturduğu küme de denklemin **çözüm kümesidir.**

---

* $\iff$ işaretine **iki yanlı gerektirme** denir. Bu işaretin solundaki bağıntı varsa, sağındaki bağıntı da vardır. Karşıt olarak, sağındaki bağıntı varsa, solundaki bağıntı da vardır.

$3 + \square = 7 \iff \square = 7 - 3$

bağıntısı şöyle okunur :

$3 + \square$, 7 ye eşit **ise,** $\square$, 7–3 e eşittir ve

$\square$, 7–3 e eşit **ise,** $3 + \square$, 7 ye eşittir.

a) $3 + \square = 7$ açık önermesinde (denkleminde) $\square$ yerine herhangi bir harf konulabilir. Sözgelimi, bu denklem

$$3 + x = 7$$

olarak da yazılır.

$3 + x = 7$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çıkarma işleminin tanımına göre :

$$3 + x = 7 \iff x = 7 - 3 \iff x = 4$$

bulunur. Öyleyse, bu açık önermenin doğru olması için x'in yerine konulabilecek sayı 4 tür. Denklemin çözüm kümesi de bir elemanlı kümedir.

Bu kümeyi, $Ç = \{4\}$ ile gösteririz.

b) $0 \times n = 0$ denkleminde n nin yerine konulacak sayıları bulalım :

$n = 2$ için $0 \times 2 = 0$ dır. $n = \frac{1}{3}$ için $0 \times \frac{1}{3} = 0$

olur. Öyleyse n gerçek sayısının her değeri için bu açık önerme doğru olur. Bu durumda çözüm kümesi, bütün gerçek sayıların kümesidir.

c) $7 \times n = 7$ açık önermesini gerçekleyen n nin değerinin $n = 1$ olduğu görülür. Çünkü bu eşitlik, ancak, $n = 1$ değeri için doğrudur. Denklemin çözüm kümesi : $Ç = \{1\}$ dir.

d) $0 \times n = 6$ açık önermesini alalım. n gerçek sayısının hiç bir değeri için bu eşitlik gerçeklenemez. Çünkü, "0" ile bir sayının çarpımı her zaman "0" dır. Öyleyse, bu denklemi gerçekleyen sayı yoktur ve çözüm kümesi boştur : $Ç = \{\ \}$.

3. Bir Denklemin Çözümü

Örnekler :

1. $2x + 1 = 7$

denklemi veriliyor. Bu denklemin çözüm kümesini bulalım.

Denklemin iki yanına 1 in toplamaya göre **tersi** olan (-1) sayısını katalım.

$$2x + 1 + (-1) = 7 + (-1)$$

olur.

$$(+1) + (-1) = 0 \text{ ve } 7 + (-1) = 6$$

olduğundan,

$$2x = 6$$

denklemi elde edilir. Buradan, bölme işleminin tanımına göre :

$$2x = 6 \iff x = 6 : 2 \iff x = 3$$

bulunur. Bu değer, denklemin **köküdür.** Başka bir söyleyişle $x = 3$ için eşitliğin birinci yanı ikinci yanına eşit olur. Bu durumda çözüm kümesi $Ç = \{3\}$ tür.

Uyarma :

$2x + 1 = 7$ denkleminden $2x = 6$ denklemine geçerken, eşitliğin iki yanına aynı sayıyı katma ilkesini uyguladık. Bir eşitliğin iki yanına aynı sayıyı katmakla eşitlik bozulmaz. Böylece çözümü yapılacak olan denklem daha sadelenmiş olur. Bundan sonra, $2x = 6$ eşitliğine **sadeleştirme ilkesini** uygulayarak $x = 3$ elde ettik.

Denklemleri çözerken uygulanan kurallar çok sadedir. Bunları şöyle sıralayabiliriz :

1) **Toplama kuralı** : $a = b \iff a + c = b + c$

2) **Çarpma kuralı** : $a = b \iff a \times c = b \times c$

3) **Bölme kuralı** : $a = b \iff \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ $(c \neq 0)$

dır. (Burada c sıfır olmayan bir gerçek sayıdır.)

Bu kuralların dışında daha önce öğrendiğimiz ve çeşitli işlemlerde uyguladığımız **değişme** ve **birleşme** özelikleri de vardır.

Şimdi bir denklemin çözüm kümesini ararken bu kuralların nasıl uygulandıklarını gösterelim :

2. $n + (-7) = 15$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Toplama kuralına göre

$$n + (-7) + (+7) = 15 + (+7)$$

ve birleşme özeliğine göre

$$n + [(-7) + (+7)] = 15 + (+7)$$

yazılır. Burada

$$(-7) + (+7) = 0 \text{ ve } 15 + (+7) = 22$$

olduğundan,

$$n = 22$$

bulunur. Öyleyse denklemin çözüm kümesi $Ç = \{22\}$ dir.

3. $x + 12 = 19$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

x bu denklemde bilinmeyendir.

Toplama kuralına göre

$$x + (+12) + (-12) = 19 + (-12)$$

ve birleşme özeliğine göre

$$x + [12 + (-12)] = 19 + (-12)$$

olarak yazılır. Burada

$$(+12) + (-12) = 0 \quad \text{ve} \quad 19 + (-12) = 7$$

olduğundan

$$x = 7$$

bulunur. Öyleyse denklemin çözüm kümesi : $Ç = \{7\}$ dir.

4. $4 \times \Delta = 32$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Δ , denklemde bir bilinmeyeni gösteriyor.

Çarpmanın ters işlemi olan bölmenin tanımına göre :

$$4 \times \Delta = 32 \iff \Delta = 32 : 4 \iff \Delta = 8$$

bulunur. Bu durumda denklemin çözüm kümesi : $Ç = \{8\}$ olur.

5. $2t + 5 = 33$ denkleminin çözüm kümesini bulalım :

Toplama kuralına göre,

$$2t + 5 = 33 \iff 2t + 5 + (-5) = 33 + (-5)$$

yazılır. Birleşme özeliğine göre,

$$2t + [5 + (-5)] = 33 + (-5)$$

olur.

$$5 + (-5) = 0 \quad \text{ve} \quad 33 + (-5) = 28 \quad \text{olduğundan,}$$

$$2t = 28$$

bulunur. Çarpmanın ters işlemi olan bölmenin tanımına göre :

$$2t = 28 \iff t = 28 : 2 \iff t = 14$$

bulunur. Öyleyse, denklemin çözüm kümesi : $Ç = \{4\}$ tür.

6. $\dfrac{x + 14}{3} = 20$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çarpma kuralına göre,

$$\frac{x + 14}{3} = 20 \iff 3 \times \frac{(x + 14)}{3} = 3 \times 20$$

yazılır. Buna göre,

$$x + 14 = 60$$

bulunur. Toplama kuralına göre,

$$x + 14 = 60 \iff x + 14 + (-14) = 60 + (-14)$$

elde edilir. Birleşme özeliğine göre,

$$x + 14 + (-14) = 60 + (-14) \iff x + [14 + (-14)] = 60 + (-14)$$

yazılır.

$$14 + (-14) = 0 \quad \text{ve} \quad 60 + (-14) = 46 \quad \text{olduğundan,}$$

$$x = 46$$

bulunur. Bu sonuca göre, verilen denklemin çözüm kümesi :

$$Ç = \{46\} \quad \text{dır.}$$

7. $3\,(4p - 1) = 15$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çarpmanın ters işlemi olan bölmenin tanımına göre,

$$3\,(4p - 1) = 15 \iff 4p - 1 = \frac{15}{3}$$

bulunur. Öyleyse, $4p - 1 = 5$ tir. Toplama kuralına göre,

$$4p - 1 + (+1) = 5 + (+1)$$

yazılır.

$$(-1) + (+1) = 0 \quad \text{ve} \quad 5 + (+1) = 6 \quad \text{olduğundan,}$$

$$4p = 6$$

olur. Çarpmanın ters işlemi olan bölmenin tanımına göre,

$$4p = 6 \iff p = \frac{6}{4} \iff p = \frac{3}{2}$$

bulunur. Bu durumda denklemin çözüm kümesi : $Ç = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ dir.

ALIŞTIRMALAR

A Grubu :

1. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz :

1) $x + 7 = 36$; 2) $25 = 7 + n$; 3) $n + 6 = 19$;

4) $n + 8 = 17$; 5) $15 - t = 5$; 6) $12 - p = 9$;

7) $x - 0{,}5 = 3$; 8) $10 = 13 + \square$; 9) $3 + \Delta = 3$;

10) $x - 8 = 76$; 11) $3\frac{1}{2} + y = 5$; 12) $\frac{y}{3} + 5 = 10$.

B Grubu :

2. Aşağıdaki denklemleri çözünüz :

1) $\frac{5x}{6} + 1 = 11$; 2) $3\,(x + 2) = 12$;

3) $3 \times \frac{\Delta}{2} - 5 = 10$; 4) $4 - \frac{x}{2} = 8$;

5) $6\,(x - 4) + 1 = 13$; 6) $\frac{2\,(x+1)}{3} = 5$;

7) $\frac{3\,(1-x)}{2} = -6$; 8) $\frac{4x}{5} = x - 2$;

9) $\frac{x+1}{2} - \frac{x}{1} = 1$; 10) $\frac{x+2}{3} - \frac{x-3}{4} = 2$.

C Grubu :

3. Aşağıdaki tümceleri, matematik önermeler (**denklemler**) biçiminde yazınız ve sonra denklemlerin kümelerini bulunuz :

1) x , bilinmeyen bir gerçek sayıyı gösterdiğine göre, bu sayının iki katının 1 eksiği 5 tir. Denklemi kurunuz. Sonra çözüm kümesini bulunuz.

2) y gerçek sayısının 3 eksiğinin 2 katı 8 olduğuna göre, denklemi yazınız ve sonra çözüm kümesini bulunuz.

3) İki gerçek sayının büyüğü, küçüğünün iki katıdır. Bunlar arasındaki fark 12 dir. Bu sayıyı bulunuz.

4) İki ardışık tamsayının toplamı 9 dur. Bu sayıları bulunuz.

Yol gösterme :

n bir tamsayı olduğuna göre ardışık sayılar **n** , **n + 1** ile gösterilir.

5) Ardışık iki teksayının toplamı 12 dir. Bu sayıları bulunuz.

6) İki ardışık çiftsayının toplamı 14 tür. Bu sayıları bulunuz.

Yol gösterme :

Ardışık çiftsayılar **2n , 2n + 2** biçimindedir. Bunların toplamı 14 olduğuna göre,

$$2n + (2n + 2) = 14$$

denklemi yazılır. Burada birleşme özeliği uygulanırsa denklem,

$$(2n + 2n) + 2 = 14$$

ya da

$$4n + 2 = 14$$

biçimine girer. Bu eşitliğin iki yanına (-2) eklenirse,

$(4n + 2) + (-2) = 14 + (-2)$ ya da $(4n + 2) + (-2) = 12$ yazılır. Birleşme özeliğine göre,

$$4n + \underbrace{2 + (-2)}_{0} = 12 \quad \text{ve}$$

$$4n + 0 = 12 \quad \text{ve}$$

olur. "0" toplamaya göre etkisiz eleman olduğundan,

$$4n = 12$$

yazılır. Çarpmanın ters işlemi olan bölmenin tanımına göre,

$$n = \frac{12}{4} \quad = \quad n = 3$$

tür. Öyleyse denklemin çözüm kümesi : $Ç = \{3\}$ olur.

Aranılan ardışık çiftsayılar : $2n = 6$ ve $6 + 2 = 8$ dir.

Problemin çözüm kümesi de $Ç = \{6 , 8\}$ olur.

7) n , n + 3 ile gösterilen iki sayının toplamı 17 dir. Bu sayıları bulunuz.

8) n , 4n , 2n + 3 ile gösterilen sayıların toplamı 68 dir. Bu sayıları bulunuz.

9) Bir babanın yaşı oğlunun yaşının üç katıdır. Her ikisinin yaşları toplamı 60 tır. Baba ile oğlunun yaşlarını bulunuz.

Yol gösterme :

Oğlunun yaşı x olursa, babasının yaşı 3x tir. Bu durumda denklemi yazınız.

10) Bir aile kazancının üçte birini yiyeceğe veriyor. Bu ailenin ayda yiyecek için harcadığı para 3600 TL dır. Ailenin aylık kazancını bulunuz.

6–4. EŞİTSİZLİKLERİN ÇÖZÜMÜ

1. Eşitsizlik Kavramı

Yönlü sayılarla yapılan çıkarma işlemine göre :

1) $(+12) - (+7) = (+5)$; 2) $(-7) - (-12) = (+5)$;

3) $(+12) - (-7) = (+19)$; 4) $(+3) - 0 = (+3)$

olduğunu biliyoruz. Burada, sonuçların **pozitif** sayılar olduğunu görüyorsunuz. Böyle bir durumda, birinci sayının ikinci sayıdan **büyük** olduğunu söyleriz ve bunu :

1) $(+12) > (+7)$; 2) $(-7) > (-12)$;

3) $(+12) > (-7)$; 4) $(+3) > 0$

biçiminde yazarız.

Yine yönlü sayılarla yapılan çıkarma işlemine göre :

1) $(+7) - (+12) = (-5)$; 2) $(-12) - (-7) = (-5)$;

3) $(-12) - (+7) = (-19)$; 4) $(-3) - 0 = (-3)$

eşitlikleri yazılır. Buradaki sonuçlar **negatif** sayılardır. Böyle bir durumda, "birinci sayı ikinci sayıdan **küçüktür**" denir ve şöyle yazılır :

1) $(+7) < (+12)$; 2) $(-12) < (-7)$;

3) $(-12) < (+8)$; 4) $-3 < 0$.

Genel olarak, a ve b herhangi yönlü iki sayıyı gösterdiğine göre :

(a — b) farkı pozitif ise,

"a sayısı b sayısından büyüktür"

denir ve

$$a > b$$

yazılır;

(a — b) farkı negatif ise,

"a sayısı b sayısından küçüktür"

denir ve

$$a < b$$

yazılır.

Böyle bağıntılara **eşitsizlik** diyoruz.

$>$ ve $<$, **eşitsizlik işaretleridir.**

Yukarıda incelediğimiz örneklerden şu sonuçlar açıkça görülür :

1) Her pozitif sayı sıfırdan büyüktür;
2) Her negatif sayı sıfırdan küçüktür;
3) Her pozitif sayı, her negatif sayıdan büyüktür;
4) İki pozitif sayıdan, salt değeri büyük olan daha büyüktür;
5) İki negatif sayıdan, salt değeri küçük olan daha büyüktür.

Uygulamalar :

1. $3 \times 7 > -34 + 8$ önermesi doğru mudur?

Çözüm :

Sayılar arasında kurulan eşitsizlik bir önermedir. Bu önermenin doğru ya da yanlış olduğunu anlamak için eşitsizlik işaretinin iki yanındaki işlemler yapılır; sonra elde edilen sonuçlar karşılaştırılır :

$$3 \times 7 = 21 \quad \text{ve} \quad -34 + 8 = -26$$

olduğundan verilen önerme

$$\mathbf{21 > (-26)}$$

biçimine girer. Önermenin **doğru olduğu** hemen görülüyor.

2. $36 : 3 < -5 + 7$ önermesi doğru mudur?

Çözüm :

$$36 : 3 = 12 \quad \text{ve} \quad -5 + 7 = 2$$

olduğundan, önerme

$$\mathbf{12 < 2}$$

olarak yazılır. Bu önermenin **doğru olmadığı** açıktır.

3. $(4 + 2) \times (5 - 5) < 8 + (-3) \times 4$

önermesi doğru mudur?

Çözüm :

$4 + 2 = 6$; $5 - 5 = 0$ ve $-3 \times 4 = -12$; $8 - 12 = -4$

olduğundan, verilen önerme

$$6 \times 0 < -4 \quad \text{ya da} \quad 0 < -4$$

biçimine girer. Bu önerme neden **yanlıştır?**

4. $4 + (27 : 3) > 3 + (-1 + 4)$ önermesi doğru mudur?

Çözüm :

$27 : 3 = 9$; $4 + 9 = 13$ ve $-1 + 4 = 3$; $3 + 3 = 6$ olduğundan verilen önerme

$$13 > 6$$

olarak yazılır. Bu önerme doğrudur.

5. Neden $7 > 7$ önermesi yanlıştır?

Çözüm :

$7 = 7$ olduğundan verilen önerme yanlıştır.

2. Eşitsizliklerin Çözümü

$x > 2$ eşitsizliği verilmiş olsun. Bu eşitsizlikte x yerine konulacak sayı bilinmediğine göre, eşitsizliğin doğru ya da yanlış olduğu hakkında birşey söyleyemeyiz. Bu eşitsizlik, bir açık önermedir. Buna, **bir bilinmeyenli eşitsizlik** de denir.

Bu $x > 2$ eşitsizliğinde x yerine, sözgelimi,

$$2{,}1 \; ; \; 3 \; ; \; 4 \; ; \; 4{,}5 \; ; \; 5$$

gibi 2 den büyük sayılar konulduğu zaman eşitsizlik doğru olur. x yerine konulacak sayılar 2 den küçük olduğu zaman eşitsizlik gerçeklenmez. Şu halde bir bilinmeyenli bir eşitsizliği çözmek demek, bu bilinmeyene verilmesi zorunlu olan değerler kümesini bulmak demektir.

Bir bilinmeyenli eşitsizlikleri çözmek için bazı kuralları bilmek gereklidir. Bu kurallar şunlardır :

1. Toplama Kuralı

$5 > 3$ eşitsizliğini alalım.

Bu eşitsizliğin iki yanına 2 ekleyelim :

$$5 > 3 \iff 5 + 2 > 3 + 2 \iff 7 > 5$$

yazılır. Bunun gibi :

$$-7 < 3 \iff -7 + 5 < 3 + 5 \iff -2 < +8$$

dir.

Bu işlemlerden aşağıdaki sonucu çıkarabiliriz :

Bir eşitsizliğin iki yanına aynı sayı katılırsa bu eşitsizliğin yönü değişmez.

2. Çarpma Kuralı

a) $(+3) > (-2)$ eşitsizliğinin iki yanını $(+4)$ ile çarpalım :

$(+3) > (-2) \iff (+4) \times (+3) > (+4) \times (-2) \iff (+12) > (-8)$

bulunur.

b) $(+5) > (-3)$ eşitsizliğinin iki yanı (-2) ile çarpılırsa :

$(+5) > (-3) \iff (-2) \times (+5) < (-2) \times (-3) \iff (-10) < (+6)$

olur. Bu işlemlerden aşağıdaki sonuçları elde ederiz :

1) Bir eşitsizliğin iki yanı pozitif bir sayı ile çarpılırsa, bu eşitsizliğin yönü değişmez.

2) Bir eşitsizliğin iki yanı negatif bir sayı ile çarpılırsa, bu eşitsizliğin yönü değişir.

3. Bölme Kuralı

$(+12) > (-8)$ eşitsizliğini alalım.

Bu eşitsizliğin iki yanını $(+4)$ ile bölelim :

$(+12) > (-8) \iff (+12) : (+4) > (-8) : (+4) \iff (+3) > (-2)$

yazılır.

Bu kez, verilen eşitsizliğin iki yanı (-4) ile bölünürse

$(+12) > (-8) \iff (+12) : (-4) < (-8) : (-4) \iff (-3) < (+2)$

bulunur.

Buradan aşağıdaki kuralları çıkarabiliriz :

1) Bir eşitsizliğin iki yanı (sıfır'dan farklı) pozitif bir sayı ile bölünürse eşitsizliğin yönü değişmez.

2) Bir eşitsizliğin iki yanı (sıfır'dan farklı) negatif bir sayı ile bölünürse eşitsizliğin yönü değişir.

Uygulamalar :

1. $x - 1 > 3$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm :

Toplama kuralına göre,

$$(x - 1) + 1 > 3 + 1$$

yazılır. Burada toplama işleminin birleşme özeliği uygulanırsa,

$$x + (-1 + 1) > 4$$

ya da $-1 + 1 = 0$ olduğundan

$$x + 0 > 4 \quad \text{ve} \quad x > 4$$

bulunur. Öyleyse, verilen eşitsizliğin çözüm kümesi,

$$Ç = \{4 \text{ ten büyük gerçek sayılar}\}$$

dır.

2. $2x + 1 > 4$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm :

Toplama kuralına göre,

$$2x + 1 + (-1) < 4 + (-1)$$

yazılır. Toplamının birleşme özeliğine göre de

$$2x + [\underbrace{1 + (-1)}] < (+3)$$

$$\underbrace{2x + 0}_{2x} < 3$$

$$2x < 3$$

bulunur. Burada bölme kuralı uygulanarak

$$\frac{2x}{2} < \frac{3}{2} \quad \text{ve} \quad x < \frac{3}{2}$$

elde edilir. Öyleyse, verilen eşitsizliğin çözüm kümesi,

$$Ç = \left\{\frac{3}{2} \text{ den küçük gerçek sayılar}\right\}$$

dır.

Uyarma :

Yukarıda verilen eşitsizliklerin

$$x > 4 \quad \text{ve} \quad x < \frac{3}{2}$$

biçimlerine konulması ile bilinmeyene verilecek olan sayıların ne olacağını kolaylıkla anlarız. Öyleyse, bir bilinmeyenli bir eşitsizliği çözerken, bilinmeyeni bu eşitsizliğin bir yanında yalnız olarak (bilinmeyenin katsayısı 1 olacak şekilde) bırakmaya çalışırız.

3. $x + 5 > -x + 3$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm :

Toplama kuralına göre,

$$x + 5 + x + (-5) > -x + 3 + x + (-5)$$

yazılır. Toplamada değişme ve birleşme özeliklerine göre,

$$\underbrace{(x + x)} + [\underbrace{5 + (-5)}] > (\underbrace{-x + x}) + [\underbrace{3 + (-5)}]$$

$$2x + 0 > 0 + (-2)$$

ya da

$$2x > -2$$

bulunur. Bölme kuralı uygulanarak

$$x > -1$$

elde edilir. Öyleyse, verilen eşitsizliğin çözüm kümesi,

$$Ç = \{-1 \text{ den büyük gerçek sayılar}\}$$

dır.

4. $7 - x < 5$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz ve bu kümeyi sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

Çözüm :

Toplama kuralına göre,

$$(7 - x) + x < 5 + x$$

yazılır. Toplamanın birleşme özeliğine göre,

$$7 + (-x + x) < 5 + x$$

ve burada

$$-x + x = 0$$

olduğundan

$$7 < 5 + x$$

olur. Eşitsizliğin iki yanına (-5) eklenirse,

$$7 + (-5) < (5 + x) + (-5)$$

yazılır. Toplamada değişme ve birleşme özeliklerine göre,

$$(+2) < x + \underbrace{(-5 + 5)}$$

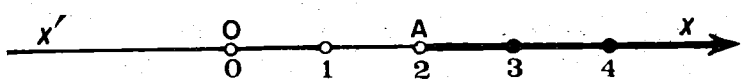
$$2 < x + 0$$

$$2 < x \quad \text{ya da} \quad x > 2$$

elde edilir. Öyleyse, verilen eşitsizliğin çözüm kümesi,

$$Ç = \{\text{2 den büyük gerçek sayılar}\}$$

dır. Bu küme, sayı doğrusu üzerinde kalın çizilmiş]Ax yarıdoğrusu ile gösterilmiştir. A noktası ve "4. şekilde" ince çizgi ile gösterilen [Ax' ışını üzerindeki noktalar, çözüm kümesinin elemanları değildir.



4. Şekil

ALIŞTIRMALAR

A Grubu :

1. Aşağıdaki önermelerin hangileri doğrudur?

a) $3 \times 7 - 5 > 10$; b) $3(-7+5)+2 > -3$;

c) $4 \times 5 - 7 > 9$; d) $\frac{2}{3}(7-4) - 1 > 1$;

e) $\frac{5}{2}(3-1)+4 > 6$; f) $\frac{2}{3}(5-7) < 0$;

2. $2x + 1 > 5$ açık önermesinin çözüm kümesini bulunuz.

3. $5 + x <- 1$ açık önermesinin çözüm kümesini bulunuz.

4. $\frac{3}{2}(x+4) < 4$ açık önermesini gerçekleyen sayılar kümesini bulunuz.

5. $3x + 5 < 4$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

6. $x + \frac{3}{2} > -\frac{5}{4}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

B Grubu :

7. "Bir gerçek sayının 3 katının 1 eksiği 2 den büyüktür" önermesini, matematik işaretleri ile yazınız ve bu önermeyi sağlayan sayılar kümesini bulunuz.

8. "x gerçek sayısı 3 sayısından çıkarıldığı zaman bulunan fark $\frac{1}{2}$ den büyük oluyor"

önermesini, matematik işaretleri ile yazınız ve sonra bu önermenin çözüm kümesini bulunuz.

9. "t gerçek sayısından 2 çıkarıldığı zaman bulunan sayının üçte ikisi (-5) ten küçük oluyor"

önermesini matematik işaretlerle yazınız; sonra bu önermenin çözüm kümesini bulunuz.

10. "y gerçek sayısından 1 çıkarılıyor; bulunan sayının dörtte birine 3 katılıyor; böylece -3 ten büyük bir sayı elde ediliyor"

önermesini matematik işaretleri ile yazınız ve sonra bu önermenin çözüm kümesini bulunuz.

11. $5 - \frac{\Delta}{2} > -2$ açık önermesi veriliyor. Bu önermenin doğru olması için Δ yerine hangi sayıları koymalıdır?

C Grubu :

12. $$\frac{x+3}{-2} > -5$$

eşitsizliğini sağlayan gerçek sayılar kümesini bulunuz.

13. $$\frac{x+7}{2} - 1 > 0$$

eşitsizliğini sağlayan sayılar kümesini bulunuz.

14. $x + 4 > 3$ eşitsizliğini sağlayan sayılar kümesini bulunuz.

15. $$x + \frac{3}{2} > -3$$

eşitsizliğini sağlayan sayılar kümesini bulunuz. Bu sayılar kümesinin görüntü noktalarını sayı ekseni üzerinde gösteriniz.

16. $$\frac{2x+2}{-3} \geq 5$$

eşitsizliğini gerçekleyen sayılar kümesini bulunuz.

Bu kümenin görüntü noktalarını sayı ekseni üzerinde gösteriniz.

6-5. İKİ BİLİNMEYENLİ SAYI ÖNERMELERİ

1. İki Bilinmeyenli Denklemler

Örnekler :

1. $2a - b$ ifadesinin değerinin 1 olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$2a - b = 1$$

yazılabilir. Bu eşitlik, iki bilinmeyenli bir denklemdir. Burada a ve b nin değerleri belli olmadığı için bu denklem, bir **açık önermedir.**

Burada, sözgelimi, $b = 3$ olursa

$$2a - 3 = 1 \iff 2a = 4 \iff a = 2$$

bulunur. Buna göre,

$$2 \times 2 - 3 = 1$$

önermesi elde edilir. Bu önermenin doğru olduğu görülüyor.

Bunun gibi, $a = -1$ için b nin değeri

$$-2 - b = 1$$

eşitliğinden bulunur.

$$-2 - b = 1 \iff -b = 3 \iff b = -3$$

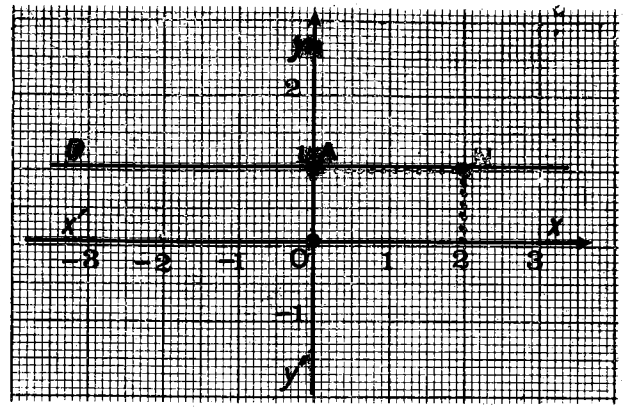
tür. Görülüyor ki, a ya da b bilinmeyenlerinden birine verilen herhangi bir değer için, öbür bilinmeyenin her zaman bir değeri vardır. Böylece verilen önermeyi gerçekleyen $(-1 ; -3)$ gibi çok sayıda ikili bulunur.

Bu ikililerden herbiri verilen iki bilinmeyenli denklemin **çözümüdür.** Bunların meydana getirdiği kümeye **çözüm kümesi** denir.

2. $y = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulalım :

[Oy ışını üzerinde $|OA| = 1$ birim ile belli A noktasını alalım ve bu noktadan x'Ox eksenine paralel D doğrusunu çizelim (5. şekil).

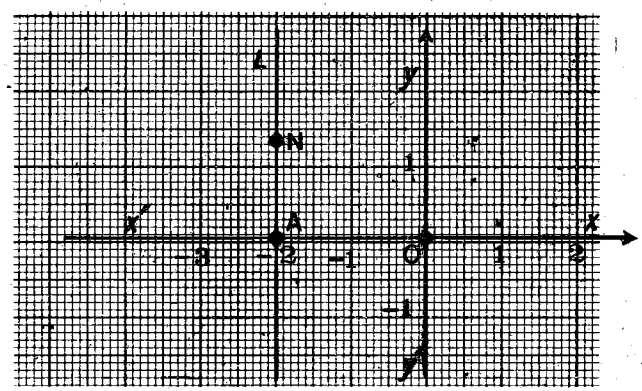
D doğrusu üzerinde alınan her N noktasına karşılık olan (x;y) ikilisi verilen denklemin çözümüdür. Bu ikililerin ikinci terimleri $y = 1$ olduğundan değişmiyor. Değişen birinci terim x dir. Verilen denklemin çözüm kümesi $(x ; 1)$ ikililerinden oluşur. Bunun geometrik şekli de D doğrusudur.



5. Şekil

3. $x = -2$ denkleminin çözüm kümesini bulalım :

[Ox' ışını üzerinde $|OA| = 2$ birim uzunluğunu alalım ve A noktasından y'Oy eksenine paralel L doğrusunu çizelim (6. şekil). Bu paralel doğru üzerinde alınan her N noktasına karşılık olan $(x ; y)$ ikilisi, verilen denklemin çözümüdür. Bu ikilinin birinci terimi $x = -2$ olduğundan değişmez. İkinci terimi olan y ye istenilen gerçek değerler verilebilir. Öyleyse, verilen denklemin çözüm kümesi $(-2 ; y)$ ikililerinden oluşur. Bu çözüm kümesinin geometrik şekli L doğrusudur.



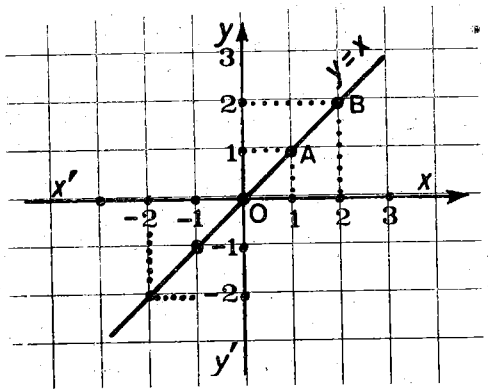
6. Şekil

4. $y = x$ denkleminin çözüm kümesini bulalım :

Bu eşitliği sağlayan ikililerin terimleri birbirine eşittir.

$x = 0$ için $y = 0$ dir. $(0 ; 0)$ ikilisine karşılık olan nokta O başlangıç noktasıdır.

$x = 2$ için $y = 2$ dir. $(2 ; 2)$ ikilisi denklemin başka bir çözümüdür. Koordinatlar düzleminde bu ikiliye karşılık olan nokta B dir. B noktasının koordinat eksenlerine olan uzaklıkları birbirine eşit olduğundan OA doğrusu $\widehat{xOy}$ ve $\widehat{x'Oy'}$ açılarının **açıortaylarının** birleşimidir.



7. Şekil

Verilen $y = x$ denklemini gerçekleyen

$$\ldots (-2 ; -2) , (-1 ; -1) , (0 ; 0) , (1 ; 1) , (2 ; 2) , \ldots$$

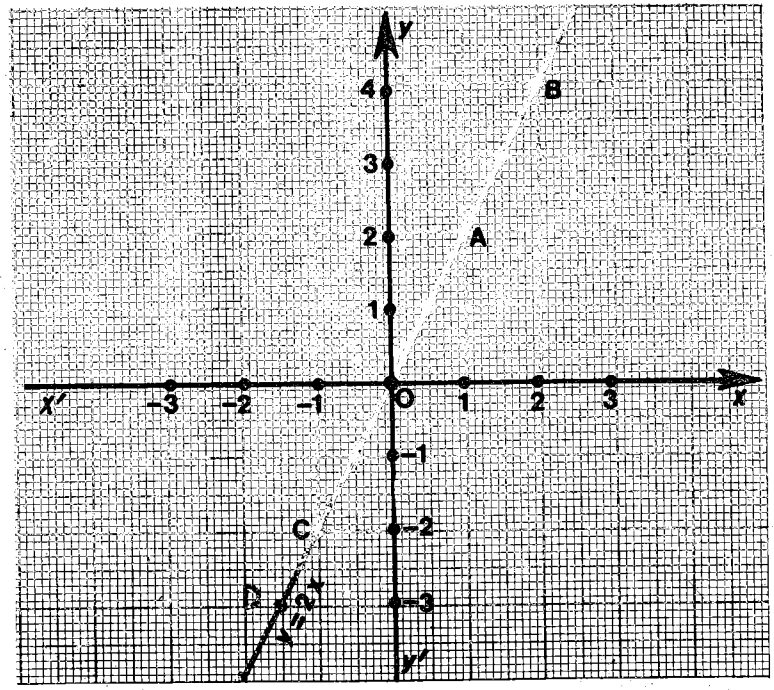
gibi bütün ikililerin görüntü noktaları, OA doğrusu üzerinde bulunurlar. Öyleyse OA doğrusu, verilen denklemin çözüm kümesinin geometrik şeklidir (7. şekil).

5. $y = 2x$ denkleminin çözüm kümesi arayalım:

Bu denklemi gerçekleyen kimi değerler aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

x	...	−2	−1	0	1	2	...
y	...	−4	−2	0	2	4	...

$(0 ; 0)$ ve $(1 ; 2)$ ikililerine karşılık olan noktalar O ve A dır (8. şekil). OA doğrusu (D doğrusu), verilen denklemi gerçekleyen ikililerin görüntü noktalarından meydana gelmiştir. Bu durumu, şekli milimetre bölmeli kâğıt üzerine çizerek görünüz.



8. Şekil

6.
$$\begin{cases} x = 3 & (1) \\ 2x - y = 4 & (2) \end{cases}$$

şeklinde verilen iki bilinmeyenli iki denklemin ortak çözüm kümesini bulalım :

$x = 3$ denklemi, koordinatlar düzleminde ordinatlar eksenine paralel olan D doğrusunu gösterir. Bu doğru üzerinde alınan her noktanın apsisi değişmez ve 3'e eşittir; ama ordinatı değişir. Bu doğru üzerindeki noktalar $(3 ; y)$ ikilisiyle gösterilir. D doğrusu üzerindeki bir noktanın yerini saptamak için y nin değerini bilmeliyiz.

Öte yandan (2) denkleminin koordinatlar düzleminde gösterdiği şekil de D' doğrusudur (9. şekil).

$$D \cap D' = \{N\}$$

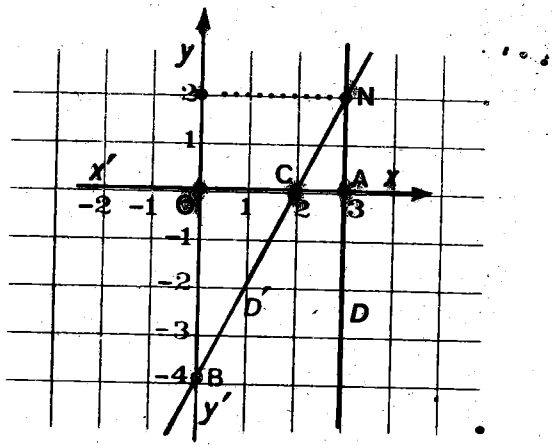
dir. N noktasına karşılık olan ikili $(3 ; 2)$ olur. Öyleyse, verilen iki bilinmeyenli iki denklemin ortak çözüm kümesi

$$Ç = \{(3 ; 2)\}$$

dir.

Hesap yolu ile bu sonuç şöyle de bulunur :

$$\left.\begin{matrix} x = 3 \\ 2x - y = 4 \end{matrix}\right\} \iff 2 \times 3 - y = 4 \iff 6 - y = 4 \iff y = 2.$$



9. Şekil

7. $$\begin{cases} x + y = 3 & (1) \\ x - y = 1 & (2) \end{cases}$$

iki bilinmeyenli iki denklemin ortak çözüm kümesini bulalım :

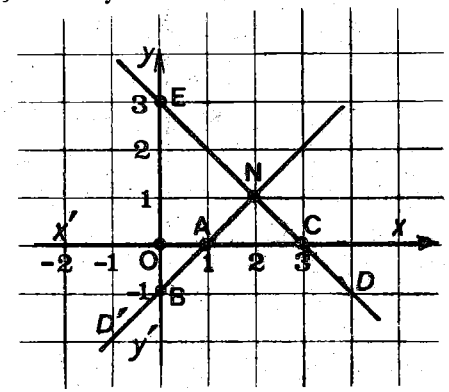
Bu denklemleri gerçekleyen kimi x ve y değerleri aşağıdaki çizelgede görülüyor :

	x	...−2	−1	0	$+\frac{1}{2}$	+1	N: +2	+3 ...
(1)	y = −x + 3	...+5	+2	+3	+2,5	+2	+1	0 ...
(2)	y = x − 1	...−3	−2	−1	$-\frac{1}{2}$	0	+1	+2 ...

Çizelgeyi inceleyiniz x e ancak (+2) değeri verilince (1) ve (2) denklemlerinin ikisinde de y = +1 oluyor. Öyleyse, (2 ; 1) ikilisi her iki denklemi de sağlıyor.

(1) denklemini sağlayan tüm ikililerin koordinatlar düzlemindeki görüntü noktaları D doğrusunu meydana getirirler. Bu doğruyu çizmek için çizelgedeki tüm ikilileri almak gerekmez. Çünkü. bir doğru iki noktası ile bellidir. Bu bakımdan, C (3;0) ve E (0;3) noktalarını birleştirmekle D doğrusu elde edilir (10. şekil).

(2) denklemini sağlayan tüm ikililerin görüntü noktaları da D' doğrusunu oluştururlar. Bu doğruyu çizmek için A (1 ; 0) ve (B(0 ; −1) noktalarını birleştirmek yeter.



10. Şekil

$$D \cap D' = \{N\}$$

dir. Grafik üzerinde ölçme yolu ile N noktasına karşılık olan ikilinin (2 ; 1) olduğu görülüyor. Öyleyse, verilen iki denklemin ortak çözüm kümesi

$$Ç = \{(2 ; 1)\}$$

dir.

Verilen önermeleri sağlayan değerler arasında ortak olanını aramak için, çizelge düzenleyerek ya da grafik üzerinde ölçme yolu ile elde ettiğimiz bu sonucu hesaplama ile de bulabiliriz :

$$\begin{matrix} (1) & x + y = 3 \\ (2) & + \quad x - y = 1 \\ \hline & (x + y) + (x - y) = 3 + 1 \end{matrix}$$

denklemleri yan yana toplanırsa:

bulunur.

Toplama işleminin birleşme ve değişme özeliklerine göre,

$$(x + x) + (y - y) = 4 \iff 2x = 4$$
$$\iff x = 2$$

elde edilir. Bu değeri (1) denkleminde yerine koyalım :

$$2 + y = 3 \iff y = 1$$

olur. Demek ki verilen iki bilinmeyenli denklemin çözüm kümesi

$$Ç = \{(2\ ;\ 1)\}$$

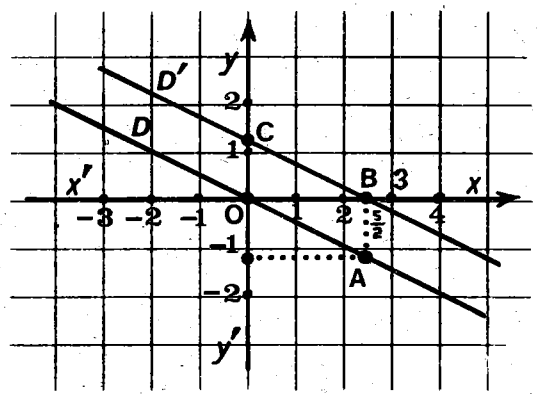
dir.

8.
$$\begin{cases} x + 2y = 0 & (1) \\ 2x + 4y = 5 & (2) \end{cases}$$

denklemlerinin ortak çözüm kümesini arayalım :

$x + 2y = 0$ denklemi $O(0\ ;\ 0)$ ve $A(2;-1)$ noktalarından geçen D doğrusunu gösterir. Bu denklemi gerçekleyen tüm ikililerin görüntü noktaları D doğrusunun üzerindedir.

$2x + 4y = 5$ denklemi de $B\left(\frac{5}{2}\ ;\ 0\right)$ ve $C\left(0\ ;\frac{5}{4}\right)$ noktalarından geçen D' doğrusunu gösterir (11. şekil).



11. Şekil

Verilen iki denklemin ortak çözüm kümesi, D ve D' doğrularının kesim noktasına karşılık olan ikiliden meydana gelir. Düzlemde,

$$D \parallel D' \iff D \cap D' = \{\ \}$$

olduğundan, verilen iki bilinmeyenli iki denklemin ortak çözüm kümesi bir boş küme olur.

ALIŞTIRMALAR

A Grubu :

1. $x \in G$ olmak üzere koordinatlar düzleminde $N(x\ ;\ 2)$ noktalarının kümesini belirtiniz.

Yol gösterme :

$N(x\ ;\ 2)$ noktalarının ordinatları değişmiyor. Öyleyse :

$$\ldots, (-2;2)\ ,\ (-1;2)\ ,\ (0;2)\ ,\ \left(\frac{1}{2}\ ;\ 2\right)\ ,\ (1;2)\ ,\ \left(1\frac{1}{2}\ ;\ 2\right)\ ,\ (2;2), \ldots$$

gibi ikililer hangi doğruyu oluştururlar?

2. $y \in G$ olmak üzere koordinatlar düzleminde $M(-1;y)$ noktalarının kümesini belirtiniz. (**Yanıt :** $x = -1$ doğrusudur.)

3. $y = -1$ denkleminin gösterdiği doğru D olsun. $N \in D$ olduğuna göre N noktasının koordinatları genel olarak nasıl gösterilir?

4. $x = 3$ denkleminin gösterdiği doğru L olsun. $M \in L$ olduğunda, M noktasının koordinatları genel olarak nasıl yazılır?

5. $2x - y = 0$ denklemini gerçekleyen beş tane ikili yazınız. Bu ikililerin koordinatlar düzlemindeki görüntü noktaları nerede bulunurlar?

B Grubu :

6. $2x - y = 2$ denkleminin gösterdiği doğruyu çiziniz.

7.
$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

denklemlerinin gösterdiği doğruları çiziniz; ortak çözüm kümesini bulunuz.

8. $x = 3$ ve $x - y = 4$ denklemlerinde $x, y \in G$ olduğuna göre, bu iki denklemin ortak çözüm kümesini bulunuz.

2. İki Bilinmeyenli Eşitsizlikler

"5. bölümde" bir bilinmeyenli eşitsizlikleri, G gerçek sayılar kümesinde inceledik. Burada, bir ve iki bilinmeyenli eşitsizlikleri koordinatlar düzleminde ele alacağız.

Örnekler :

1. $y > 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım :

A (0;2) noktasından x'x eksenine paralel D doğrusunu çizelim. Bu doğrunun üzerindeki her N noktasının ordinatı 2 olduğu için bu doğrunun, denklemi

$$y = 2$$

biçiminde yazılır.

Bu D doğrusu, koordinatlar düzlemini (I) ve (II) bölgelerine ayırır. (I) bölgesinde bulunan her M noktasının $\overline{KM}$ ordinatı 2 den büyüktür.

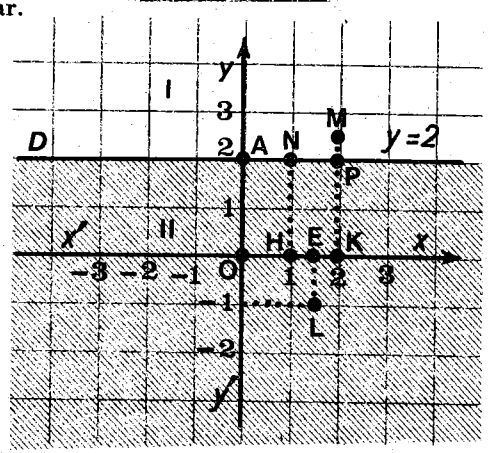
Gerçekten,

$$\overline{KM} > \overline{KP}\ ,\quad \overline{KP} = \overline{OA} = 2 \iff \overline{KM} > 2$$

olur (12. şekil.) Öyleyse (I) bölgesinin tüm noktalarının ordinatları

$y > 2$

eşitsizliğini sağlar.



12. Şekil

(II) bölgesi taranmıştır. Bu bölgedeki noktaların ordinatları 2 den küçüktür. Öyleyse, taranmış bölgedeki noktaların ordinatları, ancak

$y < 2$

eşitsizliğini sağlar. Demek ki :

$y > 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesinin geometrik şekli (I) ile gösterilen yarı düzlemdir. Bu çözüm kümesinde D doğrusunun noktaları yoktur.

Ancak $y \geqslant 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesinin geometrik şekli, D doğrusunu da kapsayan (I) yarı düzlemidir.

2. Apsisleri $x < -3$ eşitsizliğini sağlayan noktaların kümesini arayalım :

B $(-3\,;0)$ noktasından y'y eksenine paralel çizilirse

$$x = -3$$

doğrusu bulunur. Bu doğruyu D ile gösterelim. D doğrusu, düzlemi (I) ve (II) bölgelerine ayırır (13. şekil).

(I) bölgesinde bulunan her P noktasının apsisi

$$\overline{OL} < -3 \text{ ya da } x < -3$$

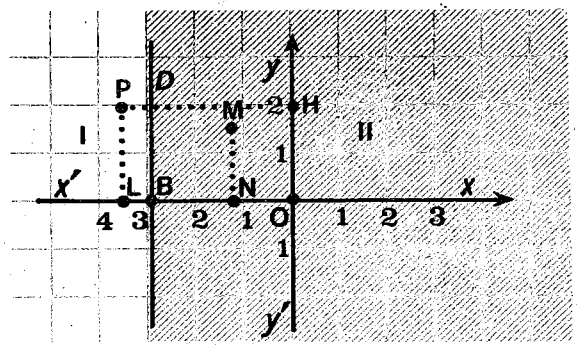
tür. Oysa, taranmış olan (II) bölgesinde bulunan herhangi bir M noktasının apsisi

$$\overline{ON} > -3 \text{ ya da } x > -3$$

tür. Bu duruma göre, apsisleri

$x < -3$

eşitsizliğini sağlayan noktaların oluşturduğu küme (I) yarı düzlemidir. Bu çözüm kümesi D doğrusunu kapsamaz.



13. Şekil

Apsisleri $x \leqslant -3$ önermesini sağlayan noktaların kümesi, (I) bölgesindeki noktalarla D doğrusu üzerindeki noktalardan oluşur.

Apsisleri $x < -3$ eşitsizliğini sağlamayan noktalar, şekilde taralı olan (II) bölgesini oluştururlar.

3. Koordinatları

$$y - 2x < 0$$

eşitsizliğini sağlayan noktaların kümesini bulalım :

Önce,

$$y = 2x$$

doğrusu çizilir (14. şekil). Bu doğrunun düzlemden ayırdığı bölgeler (I) ve (II) olsun.

(II) bölgesinde bulunan B (1; 0) noktası için

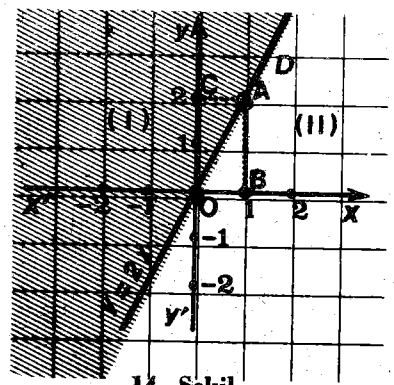
$$y - 2x < 0$$

eşitsizliği sağlanır. Gerçekten,

$$0 - 2 \times 1 = -2 < 0$$

dır. Bu taranmamış bölgedeki öbür noktalar için de verilen eşitsizliğin gerçekleneceğini örneklerle gösteriniz.

Öyleyse, (II) bölgesinin noktaları verilen eşitsizliği sağlar.



14. Şekil

(I) bölgesindeki noktaların koordinatları ise verilen eşitsizliği sağlamaz. Bu bölge, şekilde taralı olarak gösterilmiştir.

Koordinatları

$$y - 2x \leqslant 0$$

eşitsizliğini sağlayan noktaların kümesi, (II) yarı düzlemi ile OA doğrusunun birleşimidir.

4. Koordinatları

$$x + y - 1 > 0$$

eşitsizliğini sağlayan noktaların kümesini arayalım :

Önce

$$x + y - 1 = 0$$

denkleminin gösterdiği doğruyu çizelim. Bu denklemde

$$x = 0 \quad \text{için} \quad y = 1 \ ;$$
$$y = 0 \quad \text{için} \quad x = 1$$

olur. Şu halde A (0 ; 1) ve B (1 ; 0) noktalarının belirttiği doğru, aradığımız doğrudur (15. şekil).

Bu doğru, düzlemi (I) ve (II) yarı düzlemlerine ayırır.

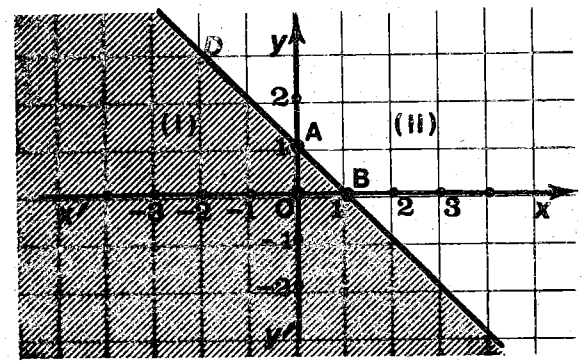
(I) yarı düzleminde alınan O (0 ; 0) noktası için,

$$x + y - 1 > 0$$

eşitsizliği

$$0 + 0 - 1 > 0$$

biçimine girer. Bu sayı önermesinin doğru olmadığı açıktır. Öyleyse, O başlangıç noktasının koordinatları verilen eşitsizliği sağlamıyor.



15. Şekil

(I) yarı düzleminde alınan öteki noktalar için de verilen eşitsizliğin sağlanmadığını kolayca gösterebiliriz. Sözgelimi (—1 ; 0) noktası için verilen eşitsizlik

$$-1 + 0 - 1 > 0 \quad \text{ya da} \quad -2 > 0$$

biçimine girer ki, bunun yanlış olduğu açıktır. Bu bölge şekilde taranmıştır.

(II) yarı düzleminde bulunan noktaların koordinatları verilen eşitsizliği sağlar. Örnek olarak, (2 ; 0) noktası için, verilen eşitsizlik

$$2 + 0 - 1 > 0 \quad \text{ya da} \quad +1 > 0$$

biçimine girer. Bu sayı önermesinin doğruluğu açıktır.

Koordinatları

$$x + y - 1 \geqslant 0$$

eşitsizliğini sağlayan noktaların kümesi, (II) yarı düzlemiyle AB doğrusunun birleşimidir.

Uyarma :

Bir doğru, koordinatlar düzlemini iki bölgeye ayırır. Bu bölgelerden birinde alınan bir noktanın koordinatları doğrunun denklemindeki x ve y nin yerine konulunca **pozitif** (ya da **negatif**) bir sayı elde edilirse, bu bölgenin öteki bütün noktaları için de aynı işarette bir sayı bulunur. Bu özelik, iki bilinmeyenli eşitsizliklerin grafikle çözümünde kolaylık sağlar.

ALIŞTIRMALAR

A Grubu :

1. $y = 1$ denkleminin gösterdiği doğruyu çiziniz. Bu doğru üzerinde bulunan her noktanın ordinatı 1 dir. Bu doğru üzerinde alınan herhangi bir nokta $M(x ; 1)$ ile gösterilebilir mi?

2. $x = -2$ denkleminin gösterdiği doğruyu çiziniz. Bu doğru y'y eksenine paralel midir? doğru üzerinde alınan her M noktası $M(-2 ; y)$ şeklinde gösterilebilir mi?

3. $x + y = 2$ denkleminin gösterdiği doğruyu çiziniz.

4. Koordinatları $x + y - 2 = 0$ iki bilinmeyenli denklemini sağlayan noktalar kümesi nasıl bir şekildir? x, y sayıları aynı işaretli midir?

5. $y + 2x = 0$ denkleminin belirttiği doğruyu çiziniz.

6. $y = -x$ denkleminin gösterdiği grafiği çiziniz. Bu denklem ile $y + 2x = 0$ denkleminin ortak çözümleri var mıdır?

7. $x + 2y = 3$ denkleminin gösterdiği grafiği çiziniz.

B Grubu :

8.
$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 & (1) \\ x - y - 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

denklemlerinin gösterdikleri doğruları çiziniz. Bu doğruların kesişme noktasını bulunuz.

9.
$$\begin{cases} x + 3y = -1 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

denklemlerinin gösterdikleri doğruları çiziniz. Grafik üzerinde bu doğruların birbirini kestiği noktayı bulunuz.

C Grubu :

10. Apsisleri $x - 1 > 0$ eşitsizliğini sağlayan noktaların kümesini şekilde gösteriniz.

11. Ordinatları $y + 2 \leqslant 0$ eşitsizliğini sağlayan noktalar, düzlemin hangi bölgesini oluştururlar?

12. Koordinatları

$$y - 2x \geqslant 0$$

eşitsizliğini sağlayan noktaların kümesini şekille gösteriniz.

13. Koordinatları

$$y + 3x < 0$$

eşitsizliğini sağlayan noktalar kümesini şekille gösteriniz.

14.
$$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ -3x + y + 6 = 0 \end{cases}$$

denklemlerinin gösterdikleri doğruları çiziniz. Bu doğruların ortak noktasının koordinatları nedir?

Verilen bu iki denklemden bir bilinmeyenli bir denklemi nasıl elde edersiniz?

Bulduğunuz bu denklemi çözerek bu bilinmeyenin değerini belirtiniz. Bundan sonra ikinci bilinmeyenin değerini hesaplayınız.

15.
$$\begin{cases} x + y > 0 \\ x - y + 1 < 0 \end{cases}$$

eşitsizliklerini birlikte sağlayan noktaların kümesi, nasıl bir bölgeyi belirtir?

KENDİMİZİ DENEYELİM

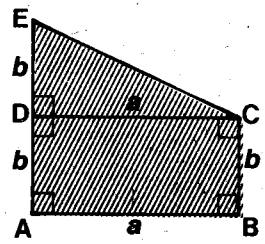
TEST SORULARI

1. **"n doğalsayısının 1 fazlasının 2 katı olan sayı"** aşağıdakilerden hangisi ile gösterilir?

☐ **a)** $2n + 1$; ☐ **b)** $2(n + 1)$; ☐ **e)** $2(n + 2)$.

☐ **c)** $n + 2$; ☐ **d)** $n + 1 \times 2$;

2. Yanda gördüğünüz "16. şeklin" **alanı** aşağıdaki ifadelerden hangisi ile gösterilir?



16. Şekil

☐ **a)** $\frac{2}{3}$ ab ; ☐ **b)** 2 ab ;

☐ **d)** $ab + b^2$; ☐ **c)** $2a + 3b$;

☐ **e)** $\frac{3}{2}$ ab.

3. Aşağıdaki sayı önermelerinden hangisi **yanlıştır**?

☐ **a)** $8 > 5$; ☐ **b)** $10 + 2 \neq 9$; ☐ **c)** $20 + 3 \neq 23$;

☐ **d)** $5 \times 7 < 6 \times 7$; ☐ **e)** $18 : 3 > 5$.

4. Aşağıdaki önermelerden hangisi **doğrudur**?

☐ **a)** Türkiye'nin en kalabalık kenti Ankara'dır.

☐ **b)** Dünyanın en yüksek dağı Avrupa'dadır.

☐ **c)** n , $n + 2$ arka arkaya gelen iki çiftsayıdır. (n, bir doğalsayıdır.)

☐ **d)** Bir üçgenin alanı, tabanı ile yüksekliğinin uzunluklarının çarpımına eşittir.

☐ **e)** Tabanının yarıçapı r ve yüksekliği h olan bir silindirin **yanal alanı** $2\pi rh$ dir.

5. $x + 0{,}5 = 1$

denkleminin **çözüm kümesi** aşağıdakilerden hangisidir.

☐ **a)** {1} ; ☐ **b)** {— 0,5} ; ☐ **c)** {0,5} ;

☐ **d)** {1,5} ; ☐ **e)** {— 1,5}

6. $\frac{x}{2} + x = 1$

denkleminin **çözüm kümesi** aşağıdakilerden hangisidir?

☐ **a)** $\left\{\frac{1}{2}\right\}$; ☐ **b)** $\left\{\frac{3}{2}\right\}$; ☐ **c)** {0} ; ☐ **d)** $\left\{\frac{2}{3}\right\}$; ☐ **e)** Hiçbiri

7. $1 + \frac{x}{2} = 1 - \frac{x}{2}$

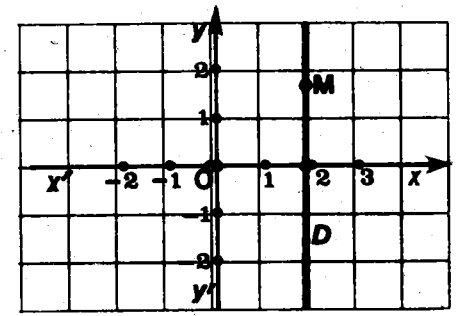
denkleminin **çözüm kümesi** şunlardan hangisidir?

☐ **a)** {1} ; ☐ **b)** {— 1} ; ☐ **c)** {2} ;

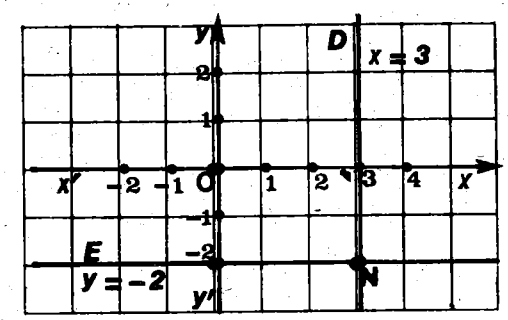
☐ **d)** { } ; ☐ **e)** {0} .

8. "17. şekilde" görülen M noktası *D* doğrusu üzerinde değişen bir noktadır. Bu noktanın **koordinatları** aşağıdakilerden hangisidir?

☐ **a)** (2;2) ; ☐ **b)** (x;2) ; ☐ **c)** (2;y) ; ☐ **d)** (2;3) ; ☐ **e)** (2;4).



17. Şekil



18. Şekil

9. "18. şekilde" görülen N noktasının **koordinatları** aşağıdakilerden hangisidir?

☐ **a)** (3;2) ; ☐ **b)** (— 3;2) ; ☐ **c)** (— 2;3) ;

☐ **d)** (— 2;—3) ; ☐ **e)** (3;— 2) .

10. Denklemi $y = \frac{1}{2}x + 1$

olan *D* doğrusu üzerinde apsisi (— 2) olan noktanın **ordinatı** nedir?

☐ **a)** 0 ; ☐ **b)** (— 1) ; ☐ **c)** (+ 1) ; ☐ **d)** (+ 2) ; ☐ **e)** (— 2).

11. $5 + x < -1$ eşitsizliğinin **çözüm kümesini** bulunuz.

☐ **a)** $Ç = \{x \mid x < -6\}$; ☐ **b)** $Ç = \{x \mid x < -4\}$;
☐ **c)** $Ç = \{x \mid x < +6\}$; ☐ **d)** $Ç = \{x \mid x < +4\}$;
☐ **e)** Bunlardan hiçbiri.

12. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
kümesi veriliyor. $x \in A$, $y \in A$ olduğuna göre,

$$x - y = 8$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

☐ **a)** $Ç = \{(9;1)\}$; ☐ **b)** $Ç = \{(8;0)\}$; ☐ **c)** $Ç = \{(0;8)\}$;
☐ **d)** $Ç = \{(9;1), (8;0)\}$; ☐ **e)** $\{(1;9), (0;8)\}$.

13.
$$\begin{cases} y = 3 & (1) \\ x + y = 5 & (2) \end{cases}$$

denklemlerinin ortak çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

☐ **a)** $Ç = \{(2;5)\}$; ☐ **b)** $Ç = \{(2;3\}$; ☐ **c)** $\{(3;2)\}$;
☐ **d)** $Ç = \{(0;3)\}$; ☐ **e)** $Ç = \{(-2;3)\}$.

14.
$$\begin{cases} y = x & (1) \\ y = x + 2 & (2) \end{cases}$$

denklemlerinin **ortak çözüm kümesi** şunlardan hangisidir?

☐ **a)** $Ç = \{(0;2)\}$; ☐ **b)** $Ç = \{(2;0)\}$; ☐ **c)** $Ç = \{(0;0)\}$
☐ **d)** $Ç = \{\ \}$; ☐ **e)** Hiçbiri.

15. "Bir sayının üç katından, bu sayının yarısı çıkarılıyor ve 20 bulunuyor."

Bu önermenin **denklemi** aşağıdakilerden hangisidir?

☐ **a)** $3x - x = 20$; ☐ **b)** $3x - \frac{x}{2} = 20$; ☐ **c)** $3 - \frac{x}{2} = 20$

☐ **d)** $3x + \frac{x}{2} = 20$; ☐ **e)** Hiçbiri.

16. Bir sayının üçte-ikisi ile yarısı arasındaki fark 1 olduğuna göre bu sayı nedir?

☐ **a)** 5 ; ☐ **b)** 6 ; ☐ **c)** 4 ; ☐ **d)** -7 ; ☐ **e)** 8.

17. $\frac{x+1}{2} - x < 1$ eşitsizliğini sağlayan x 'in değerleri nedir?

☐ **a)** $x < 1$; ☐ **b)** $x < 2$; ☐ **c)** $x > -1$;
☐ **d)** $x > 2$; ☐ **e)** $x < 3$.

18. $x - 1 < 0$ ve $2x + 1 > 0$
eşitsizliklerini birlikte sağlayan x' in değerleri aşağıdakilerden hangisidir?

☐ **a)** $0 < x < 1$; ☐ **b)** $x > -\frac{1}{2}$; ☐ **c)** $-\frac{1}{2} < x < 1$;

☐ **d)** $x < \frac{1}{2}$; ☐ **e)** $x > 2$.

19. $\frac{x+1}{x-1} = 2$
denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

☐ **a)** $\{1\}$; ☐ **b)** $\{3\}$; ☐ **c)** $\{-1\}$; ☐ **d)** $\left\{\frac{1}{2}\right\}$; ☐ **e)** $\{4\}$.

20.
$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

denklem düzeninin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

☐ **a)** $\{(1;1)\}$; ☐ **b)** $\{(1/2;-1)\}$; ☐ **c)** $\{(-1;3)\}$;
☐ **d)** $\{(0;1)\}$; ☐ **e)** $\{(3;1)\}$.

7. BÖLÜM İSTATİSTİK VE GRAFİKLER

Konunun Ayrıntıları

7–1. İstatistik İçin Bilgi Nasıl Toplanır?

7–2. Çeşitli Grafikler

7–3. Bilgilerin Özetlenmesi

7–4. Örnekleme

7–1. İSTATİSTİK İÇİN BİLGİ NASIL TOPLANIR

Sizin yaşınızda olan çocukların ortalama boyları 140 cm. ile 150 cm. arasında değişir. Buna göre, sınıfınızda boyları 140 cm. den küçük olan arkadaşlarınız kısa boylu, 150 cm. den büyük olan arkadaşlarınız da uzun boyludur. Bu bilgilere göre sınıfınızda :

a) Uzun boylu kaç öğrenci vardır?

b) Kısa boylu kaç öğrenci vardır?

c) Orta boylu kaç öğrenci vardır?

Böylece sınıfınızda bulunan öğrencileri boy bakımından kümelere ayırmış ve her kümede bulunan öğrencilerin sayısını anlamış oluruz.

İşte burada yapılan iş, sınıfınızdaki öğrencilerin boyları ile ilgili bilgi toplamaktadır.

Örnekler :

1. Tuna'nın sınıfında 40 öğrenci vardır. Tuna, sınıf arkadaşlarının yaşları ve ağırlıklarıyle ilgili olarak topladığı bilgilere göre aşağıdaki çizelgeleri düzenledi :

Yaşları	12	13	14	15
Öğrenci sayısı	2	15	18	5

Ağırlıkları (kg.)	30–35	36–40	41–45	46–50	51–55
Öğrenci sayısı	5	10	18	5	2

Bu çizelgelerden birincisinde ortaokul II. sınıfta yaşları 14 olan çocukların çoğunluğu meydana getirdiği anlaşılıyor. İkinci çizelgede ise, bu sınıftaki öğrencilerin çoğunun ağırlıklarının 41 kg. ile 45 kg. arasında olduğu görülüyor.

Böylece, Tuna'nın yaptığı çalışmalarla, bu sınıftaki çocukların yaşları ve ağırlıkları ile ilgili bazı sonuçlara varıyoruz.

2. Yurdumuzda 1927 yılından 1975 yılına kadar genel nüfus sayımı yapılmıştır. Bu sayımlarda, sayım memurları, sayım fişlerine her ailede bulunan kadın, erkek ve çocukların sayısını, bunların yaşlarını, öğrenim durumlarını ve daha başka birtakım bilgileri yazarlar. Bu fişler bir merkezde toplanır ve nüfusumuzun gerek sayısı, gerekse başka özellikleri üzerinde sonuçlar çıkarılır. Nüfus artışı, okur-yazar nüfusun artışı, nüfusun mesleklere göre dağılışı vb. gibi...

Aşağıdaki çizelgeden nüfusumuzun 1960–1965, 1965–1970 ve 1970–1975 yılları arasında % 13 arttığı görülüyor. Buna göre 1980 yılında nüfusumuzun 45 200 000 olacağı anlaşılmaktadır.

Sayım yılları	1935	1940	1945	1950	1955	1960	1965	1970	1975
Nüfus(Mil. olarak)	16,2	17,8	18,8	20,9	24,1	27,8	31,4	35,6	40

Aşağıdaki çizelgede, 1965 ve 1970 yıllarında yapılan sayımlarda nüfusumuzun öğrenim durumunun cinsiyete göre dağılımını görüyorsunuz. Bu çizelgeden şu sonuçları elde edersiniz :

1°) 5 yıl içinde kız ve erkek olarak ilkokulu bitirenlerin sayısı 2 310 000 arttığı halde, aynı süre içinde ortaokulu bitirenlerin sayısı ancak 406 000 kadar artmıştır. Bu sonuç gösteriyor ki, ilkokulu bitirenlerin çoğunluğu ortaokula gitmemiştir. Bu durum, nüfusumuzun öğrenim durumu bakımından çok düşündürücüdür.

Nüfusumuzun öğrenim durumunun cinsiyete göre dağılımı(*)

	Sayım yılı			
	1965		1970	
	11 ve daha yukarı yaş		11 ve daha yukarı yaş	
	Erkek	Kadın	Erkek	Kadın
Yalnız okur yazar(**)	2 096 000	868 000	1 841 000	952 000
İlkokulu	4 064 000	2 033 000	5 429 000	2 978 000
Ortaokulu	493 000	202 000	734 000	367 000
Lise	198 000	77 000	282 000	123 000
Meslek okulu	184 000	86 000	256 000	137 000
Yüksek okul ve Fakülte	142 000	29 000	195 000	41 000
Derecesi bilinmeyen	5 000	2 000	11 000	11 000

2°) 5 yıl içinde liseyi bitirenlerin sayısında 130 000 kişilik bir artış vardır. Bundan anlaşılıyor ki, ortaokulu biriten öğrencilerin üçtebiri kadarı lise öğrenimi görmüştür. Bu sonuç yukarıdaki duruma göre daha sevindiricidir.

Bu çizelgeden daha başka sonuçlar da çıkarabiliriz. Fakat biz burada yukarıdaki iki sonuçla yetiniyoruz.

İşte yukarıdaki örneklerde olduğu gibi, toplum hayatımızla ilgili olayları sayılarla anlatır ve bunlardan ilginç sonuçlar çıkarabiliriz. Bu sonuçlardan birçok alanlarda yararlanırız. Toplanan bu çeşit bilgilere **istatistik** diyoruz.

Okuma Parçası

İstatistiklerle İlgili Tarih Bilgisi :

İlk ve orta çağlarda istatistikle ilgili çalışmalar az da olsa yapılmıştır. Mısır'da ailelerin sayımı, Çin'de ekilen ve ekilemeyen toprakların sayımı, Romalılar'da nüfus sayımı, bu çalışmalara birer örnek olarak gösterilebilir.

Selçuklular zamanında istatistiğe çok önem verilmiş ve Devletin gelir ve giderleri ile ilgili çizelgeler düzenlenmiştir.

* İlk üç basamaktaki rakamlar yuvarlak olarak alınmıştır.

** Bir okulu bitirmemiş olup okur yazar olan.

Osmanlı İmparatorluğu'nda da askerlik çağında olanların sayımı yapılmış, hayvanların sayımı ve arazi sayımı da sadece vergi yönünden ele alınmıştır.

1844 de yapılan nüfus sayımında kişilere kimlik cüzdanı verilmiştir.

Yurdumuzda Cumhuriyet yönetiminde istatistik işlerine çok önem verilmiş ve bu amaçla 1927 yılında Başbakanlığa bağlı bir İstatistik Genel Müdürlüğü kurulmuştur. Bilimsel anlamda Türkiye'de ilk nüfus ve tarımla ilgili sayımlar ve istatistik işlemleri 1927 yılında yapılmıştır.

7-2. ÇEŞİTLİ GRAFİKLER

1. Çizgi Grafiği

Aşağıdaki çizelge bir saat aralıkla günün ısı derecelerini gösteriyor. Bu çizelge, günün bazı saatları ile ölçülen sıcaklık dereceleri arasında bağıntı kuruyor.

Saatlar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Sıcaklık dereceleri (santigrat)					11	10	9	8	9	11	12	16	18	20	20	18	16	15	15	13	12	10	8	7

Kare bölmeli bir kağıt üzerine biri yatay, öbürü düşey olan iki doğru çizelim. Yatay doğru üzerine günün saatlarını gösteren doğalsayıları yazalım.

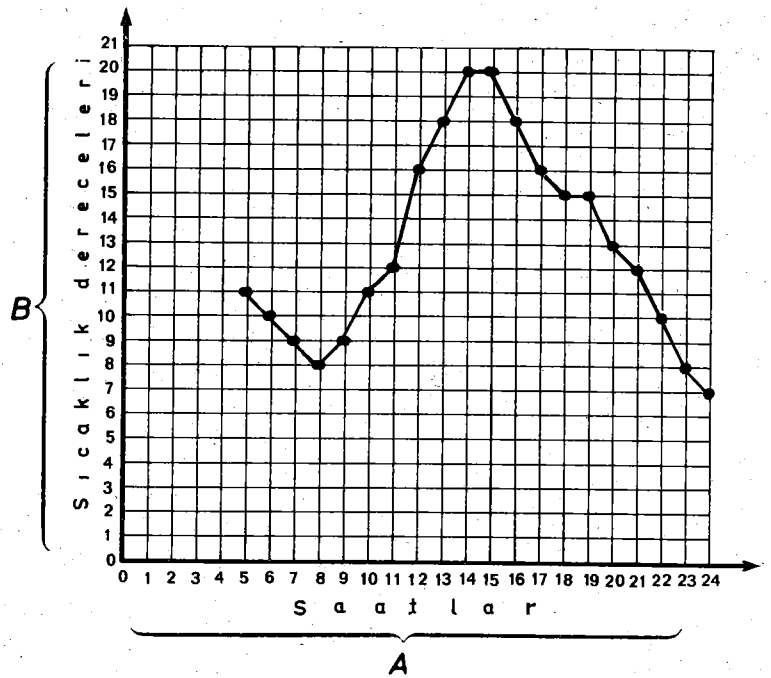
Çizelgede, sözgelimi, sabahın saat 5 inde **sıcaklık** derecesi 11°C olarak gösterilmiştir. Bu iki sayı arasında bir ilişki vardır. Bu sayılar bir ikili meydana getirirler. Bunu (5; 11) biçiminde göstereceğiz. Çizelgeye göre saat 15 te **sıcaklık** derecesi 20°C dir. Bu sayıların oluşturduğu ikili (15 ; 20) ile gösterilir. Çizelgedeki saatlar A kümesini, **sıcaklık** dereceleri de B kümesini göstersinler. Bu iki küme yardımı ile ikililer meydana getiriyoruz. Bu ikililer de bir küme meydana getirirler. Her ikili, kare bölmeli kağıt üzerinde bir noktaya karşılık olur. Bu noktaları siyah yuvarlaklar ile göstereceğiz. Bu siyah yuvarlak noktalar, günün saatları ile bunlara karşılık olan **sıcaklık** dereceleri arasında bir bağıntıyı anlatır. Şekle göre bu "**saat - sıcaklık**" bağıntısını :

$\mathcal{B} = \{(5;11), (6;10), (7;9), (8;8), (9;9), (10;11),$
$(11;12), (12;16), (13;18), (14;20), (15;20),$
$(16;18), (17;16), (18;15), (19;15), (20;13),$
$(21;12), (22;19), (23;8), (24;7)\}$

şeklinde yazarız.

Bu bağıntıda bulunan her ikili, düzlemde bir noktayı gösteriyor. Sözgelimi (7 ; 9) ikilisi düzlemde bir noktayı belirtir. 7 ve 9 sayılarından meydana gelen bu ikilinin ilk sayısı olan 7 bu noktanın **apsisi**, ikinci sayı olan 9 da **ordinatıdır**. 7 ve 9 sayıları, ikilinin gösterdiği noktanın **koordinatlarıdır**.

Çizelgenin böyle noktalarla gösterilmesine **şema** diyoruz. Kimi zaman, şema ile gösterilen bağıntının daha açık görünmesini sağlamak için ikililerin görüntü noktalarını sürekli çizgilerle birbirine birleştirmek yeter. Böylece elde edilen şekle bu bağıntının **grafiği** denir (1. Şekil).



1. Şekil

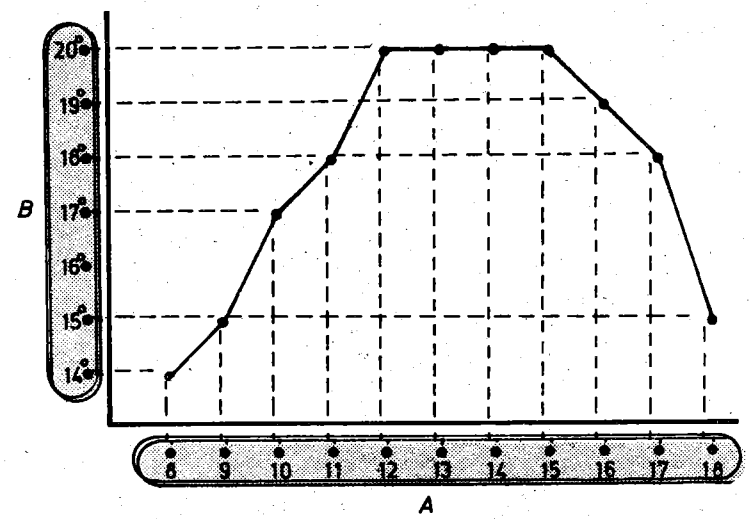
Örnekler :

1. "2. şekildeki" grafik, bir günde sabah saat 8 den 18 'e kadar sıcaklık derecelerini gösteriyor. Bu grafiğe bakılarak bazı ilginç bilgiler elde edilir :

Saat 8 de sıcaklık 14°C dir. Saat 10 da sıcaklık 17°C ve saat 12 de 20°C dir. Görülüyor ki, sıcaklık derecesi saat 8 den saat 12 ye değin sürekli olarak artıyor.

Saat 12 ile saat 15 arasında sıcaklık değişmiyor ve 20°C olarak kalıyor.

Saat 15 ten saat 18 'e değin sıcaklık derecesi sürekli olarak azalıyor ve saat 18 de 15°C ye düşüyor.



2. Şekil

2. "3. şekildeki" grafik, bir günde ikişer saat aralıkla ölçülen açık hava basıncını gösteriyor :

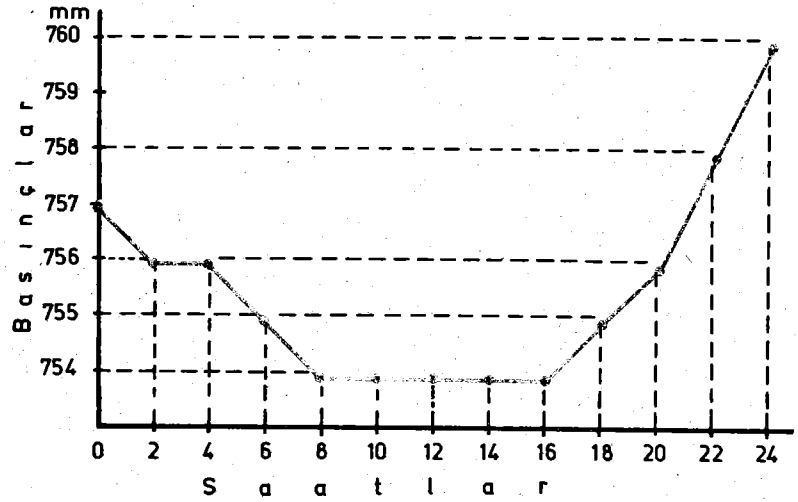
a) Saat 5 ; 12 ve 18 'deki basınçlar nedir?

b) Saat kaçta basınç 755 mm. ve 754 mm. dir?

c) Saat 2 den 12 ye değin basınç sürekli olarak azalıyor mu?

d) Saat 4 den 8 e ve 4 den 16 ya kadar basınç sürekli olarak azalıyor mu?

e) Saat 12 ile 22 , saat 16 ile 24 ve saat 18 ile 22 arasında basınç sürekli olarak artıyor mu?



3. Şekil

3. Bir kilogram şekerin fiyatı 10 liradır. Aşağıdaki grafikte yatay doğru üzerinde kg. düşey doğru üzerinde de ödenen paralar TL olarak yazılmıştır.

Bir kg. şekerin fiyatı 10 lira olduğuna göre, satın alınan şekerlere ödenen paralar aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir :

Şekerin ağırlığı (kg.)	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4
Ödenen para (TL)	0	5	10	15	20	25	30	35	40

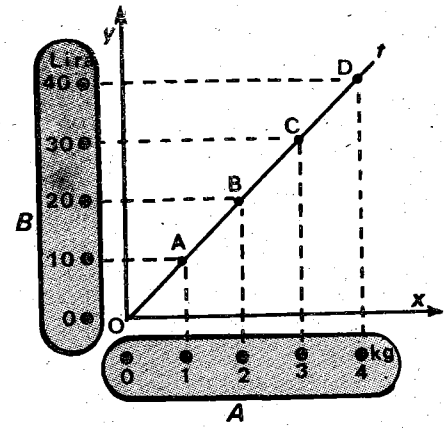
Çizelgede görüldüğü gibi, alınan şekerin ağırlığı arttıkça, ödenen para da artıyor.

Bu çizelgedeki şekerin ağırlığı ile ödenen parayı

(şekerin ağırlığı ; ödenen para)

ikilisiyle göstereceğiz.

Bu ikililerin birinci terimlerini yatay doğru üzerinde, ikinci terimlerini de düşey doğru üzerinde ayrı uzunluk birimlerine göre işaret edelim.



4. Şekil

(Şekerin ağırlığı ; ödenen para)

ikilisine karşılık, düzlemde bir nokta bulunur. Şekilde görülen

O , A , B , C , D

noktaları :

(0;0), (1;10), (2;20), (3;30), (4;40)

ikililerin görüntüleridir.

0 kg. ile 1 kg. arasında birçok ağırlıklar vardır. Sözgelimi : 1 gr., 3 gr., 5 gr., 10 gr., 20 gr., ... 500 gr., .. 999 gr., ... gibi

Şekerin ağırlığı ne kadar küçük olursa olsun, buna karşılık bir para ödenir. Öyleyse O noktası ile A noktası arasında daha birçok nokta vardır. Bunun gibi, A ile B , B ile C ve C ile D arasında da pek çok nokta bulunur. Bütün bu noktaları birbiri ardınca birleştirerek bir şekil elde ederiz. Bu şekil [Ot ışınıdır (4. şekil).

Bu [Ot ışını, şekerin ağırlığı ile ödenen para arasındaki bağıntının grafiğidir.

2. Çubuk (Sütun) Grafiği

Örnekler :

1. Aşağıdaki çizelge, çeşitli yıllarda yapılan nüfus sayımlarını gösteriyor :

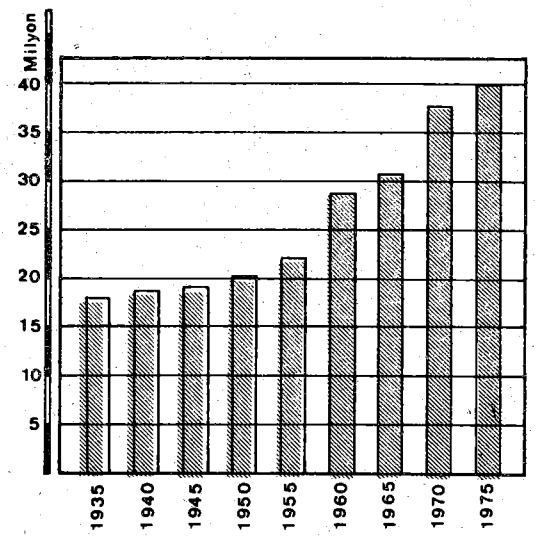
Sayım yılları :	1935	1940	1945	1950	1955	1960	1965	1970	1975
Nüfus (Milyon) :	16,2	17,8	18,8	20,9	24,1	27,8	31,4	35,6	40

5 000 000 nüfusu, uzunluğu 1 cm. = 10 mm. olan bir çubukla gösterelim. Buna göre :

16,2 milyon nüfusu ..... 32,4 mm. ;
17,8 milyon nüfusu ..... 35,6 mm. ;
18,8 milyon nüfusu ..... 37,6 mm. ;
20,9 milyon nüfusu ..... 41,8 mm. ;
24,1 milyon nüfusu ..... 48,2 mm. ;
27,8 milyon nüfusu ..... 55,6 mm. ;
31,4 milyon nüfusu ..... 62,8 mm. ;
35,6 milyon nüfusu ..... 71,2 mm. ;
40 milyon nüfusu ..... 80 mm.

ile gösteririz.

Bu ölçülere göre yapılan grafik, "5. şekilde" gösterilmiştir. Bu çeşit bir grafiğe **çubuk grafiği** diyoruz.



5. Şekil

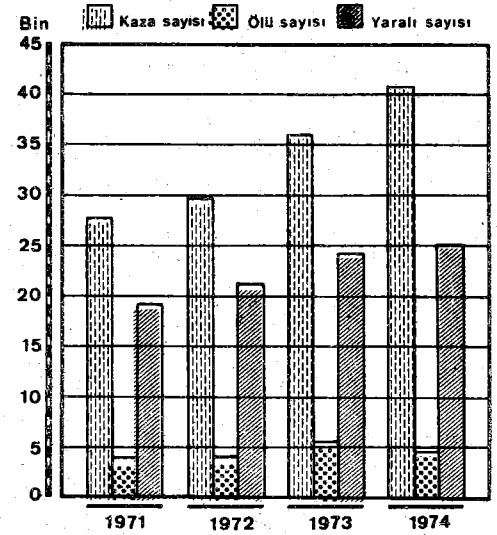
Bu şekilde hazırlanmış olan grafikleri incelemek ve sonuçlar çıkarmak çok kolaydır.

2. "6. şekildeki" çubuk grafiği yıllara göre yurdumuzdaki trafik kazalarını gösteriyor. Bu grafiği inceleyerek aşağıdaki soruları yanıtlayınız :

a) Ardışık iki yıl içindeki kaza sayılarını bulunuz. Kaza sayısı artmış mıdır, azalmış mıdır?

b) Ardışık iki yıl içindeki yaralıların sayılarını yaklaşık olarak söyleyiniz.

c) Ardışık iki yıl içindeki kazalarda ölenlerin sayısını yaklaşık olarak bulunuz.



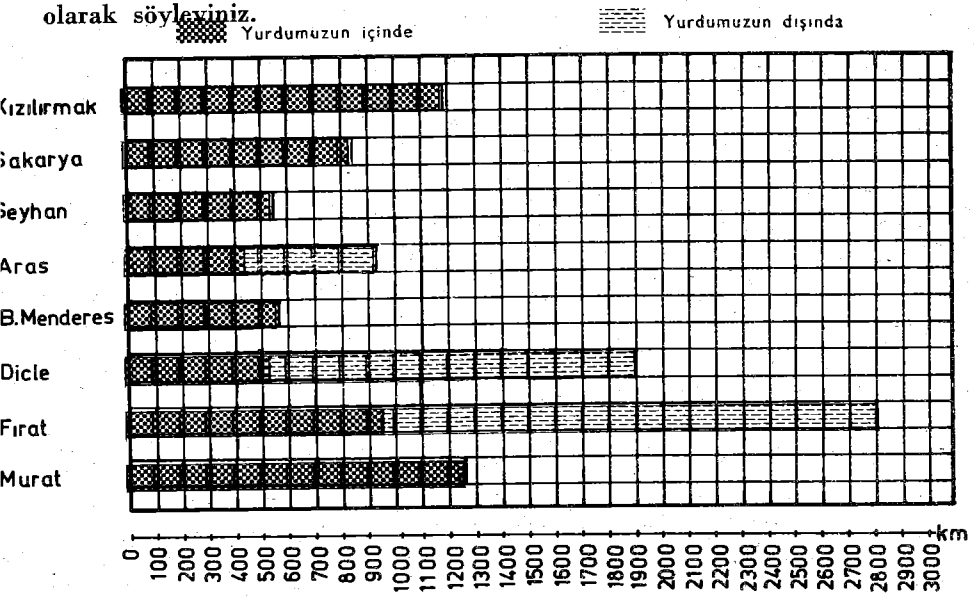
6. Şekil

3. Yurdumuzun başlıca akarsuları ile ilgili çubuk grafiği aşağıda verilmiştir. Bu grafikte 5 mm.'lik çubuk, akarsuyun 100 km. sinin uzunluğunu gösteriyor. Çubukların kırmızı parçaları, akarsuların sınırlarımız içinde kalan kısımlarını, taranmış parçaları da sınırlarımızın dışında kalan kısımlarını gösteriyor (7. şekil).

Bu grafiği inceleyerek aşağıdaki soruları yanıtlayınız :

a) Kızılırmak, Sakarya, Seyhan ve Büyük Menderes'in uzunlukları yaklaşık olarak kaçar km. dir?

b) Aras, Dicle, Fırat ırmaklarının kaç km. lik kısmı sınırlarımız içinde ve kaç km. lik kısmı sınırlarımızın dışındadır? Yaklaşık olarak söyleyiniz.



7. Şekil

ALIŞTIRMALAR

1. Yurdumuzun belli başlı dağlarının yükseklikleri aşağıda verilmiştir. 100 m. yükseklik, 1 mm. ile gösterildiğine göre, bu dağların yüksekliklerini gösteren çubuk grafiğini yapınız.

Büyük Ağrı Dağı	: 5 165	m.
Süphan Dağı	: 4 434	m.
Cilo Dağı	: 4 119	m.
Küçük Ağrı Dağı	: 3 925	m.
Erciyes Dağı	: 3 916	m.
Uludağ	: 2 595	m.

2. Yurdumuzda çeşitli yıllara göre çay üretimi aşağıdaki çizelgede verilmiştir. 1 000 ton çay 2 mm. uzunluğunda bir çubukla gösteriliyor.

Buna göre, çay üretiminin çubuk grafiğini yapınız.

Yıllar	1970	1971	1972	1973	1974	1975
Çay Üretimi (Ton)	33 400	33 585	46 500	43 202	42 781	55 972

3. Yurdumuzda çeşitli yıllara göre buğday üretimi aşağıdaki çizelgede verilmiştir. 1 000 000 ton buğday 1 cm. uzunluğunda bir çubukla gösteriliyor. Buna göre buğday üretiminin çubuk grafiğini yapınız.

Yıllar	1970	1971	1972	1973	1974	1975
Buğday üretimi (Milyon Ton.)	10	13,5	12,2	10	11	14,8

4. Yurdumuzda üretilen ve dışarıdan alınan ham petrolle ilgili bir çizelge görüyorsunuz. 100 000 ton ham petrol, uzunluğu 1 cm. olan bir çubukla göstererek, yurdumuzda üretilen ve yurt dışından getirilen ham petrolü ayrı renkte çubuklarla gösteren bir grafik yapınız:

Yıllar	1970	1971	1972	1973	1974	1975
Üretilen petrol (Bin Ton)	3 542	3 453	3 410	3 511	3 304	3 095
Dıştan Alınan Petrol (Bin ton)	4 055	5 470	7 323	9 306	9 961	9 634

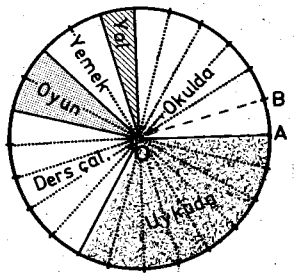
3. Daire grafiği

Örnekler :

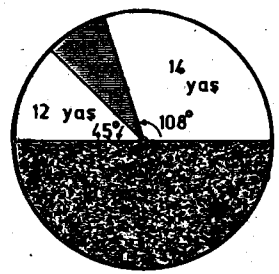
1. Yarıçapı 3 cm. olan bir çember çiziniz. Bu çemberle ilgili dairenin 15°'lik AOB merkez açısını çiziniz. Sonra şekilde görüldüğü gibi daireyi 24 eş parçaya bölünüz (8. şekil).

(AOB) daire dilimi bir saatlık zaman süresini gösteriyor.

Zafer, gününün 6 saatını okulda, 1 saatini yolda, 2 saatini yemeklerde, 2 saatını oyunda, 5 saatini ders çalışmada ve geriye kalan 8 saatini de uykuda geçiriyor. Zafer'in günlük zamanını nasıl kullandığını gösteren grafiği siz de defterinize renkli kalemlerle çiziniz.



8. Şekil



9. Şekil

2. Bir ortaokulun II-A sınıfında 40 öğrenci vardır.

5 öğrenci 12 yaşında ;
20 öğrenci 13 yaşında ;
12 öğrenci 14 yaşında ;
3 öğrenci 15 yaşındadır.

Bu bilgileri daire grafiği ile gösterelim :

Tüm çember 360° dir.

$$\frac{360^\circ}{40} = 9^\circ \quad \text{olur.}$$

Şu halde merkez açısı 9° olan daire dilimi 1 öğrenciyi gösterdiğine göre :

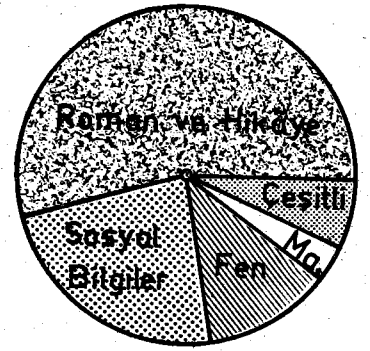
5 öğrenci $5 \times 9^\circ = 45^\circ$
20 öğrenci $20 \times 9^\circ = 180^\circ$
12 öğrenci $12 \times 9^\circ = 108^\circ$
3 öğrenci $3 \times 9^\circ = 27^\circ$

lik daire dilimleriyle gösterilir. Buna uygun olan daire grafiği "9. şekilde" gösterilmiştir.

Uyarma :

Sınıftaki öğrenci sayısı 360 sayısını tam olarak bölmezse, bölüm yaklaşık olur. Bu durumda ölçümleri dereceden daha küçük olan açılar çizmek gerekir. Bu, pratikte kolay değildir. Bu bakımdan 360 sayısını tam olarak bölmeyen sayılarla ilgili grafikler, genellikle daire grafiği şeklinde gösterilmez.

3. Bir kasabanın kitaplığında 1 200 kitap vardır. Bu kitaplar arasında :



10. Şekil

650 tane roman ve öykü;
280 tane sosyal bilgilerle ilgili kitap;
150 tane fen bilgileri ile ilgili kitap;
40 tane matematik ile ilgili kitap;
80 tane çeşitli konularda kitap vardır. Bu kitaplıktaki kitaplar, daire grafiği ile yanda gösterilmiştir.

$$\frac{360}{1\,200} = \frac{3}{10}$$

olduğu için 3°'lik daire dilimi 10 kitabı gösterecek biçimde daire grafiği yapılmıştır.

4. Bir Grafiğin Özelikleri

a) Grafiğin neyi gösterdiğini belli eden açık bir başlığı olmalıdır.

b) Grafiğin ölçeği yazılmış olmalıdır.

c) Grafiğin gösterdiği sayılar gerçeğe uygun olmalıdır.

d) Bir grafik, açık ve kolayca anlaşılacak biçimde çizilmiş olmalıdır.

e) Grafiğin üzerinde ancak gereği kadar sayı yazılmış olmalı ve bu sayılar kolayca okunacak biçimde yazılmalıdır.

5. Bir Grafiği Çizerken Göz Önünde Tutulması Gerekli Olan Hususlar

a) İyi bir grafik çizebilmek için cetvel, pergel, milimetre bölümlü kâğıt, kareli kâğıt kullanılmalıdır.

b) Kırık çizgi ve çubuk grafiğini çizerken, zaman, yer, adlar, ... gibi nitelikler **yatay doğru** üzerinde, nicelikler de **düşey doğru** üzerinde yazılmalıdır.

c) Çubuk grafiğinde çizilecek çubukların genişliğinin önemi yoktur. Ancak, göze iyi görünmesi bakımından bir grafikte çubuklar aynı genişlikte çizilmelidir.

d) Ölçek, kâğıdın büyüklüğüne göre seçilmelidir.

e) Başka bir zorluk yoksa, yatay ve düşey doğrular üzerindeki birimleri aynı ölçüde almalıdır.

ALIŞTIRMALAR

1. Bir yerde Kasım ayında hava 16 gün kapalı, 8 gün açık ve 6 gün de parçalı bulutlu geçmiştir.

Bu yerde Kasım ayındaki hava durumunu daire grafiği ile gösteriniz.

2. Aşağıdaki çizelgede yurdumuzda 1974 ve 1975 yıllarında üretilen tahılları görüyorsunuz. Bu çizelgeleri iki ayrı daire grafiği ile gösteriniz :

Yıllar	Bin ton olarak						
	Buğday	Arpa	Çavdar	Yulaf	Mısır	Çeşitli	Toplam
1974	11 000	3 330	560	380	1 200	499	16 889
1975	14 750	4 500	750	390	1 200	521	22 111

7-3. BİLGİLERİN ÖZETLENMESİ

1. Aritmetik Ortalama

Örnekler :

1. II-A sınıfındaki kız öğrencilerin boyları aşağıdaki çizelgede verilmiştir :

Öğrenciler	Boyları (cm. olarak)
1. kız öğrenci	140
2. kız öğrenci	145
3. kız öğrenci	148
4. kız öğrenci	150
5. kız öğrenci	152
6. kız öğrenci	153
7. kız öğrenci	155
8. kız öğrenci	160
9. kız öğrenci	160
10. kız öğrenci	+ 164
Toplam :	1 527

Bu sınıftaki kız öğrencilerin boylarının ortalaması :

$$\frac{1\,527}{10} = 152{,}7 \text{ cm. dir.}$$

2. Tuna, bir kanaat döneminde matematik dersinin yazılı yoklamalarından 4 , 8 , 7; sözlü yoklamalarından 9 , 7 ve 10 almıştır.

Tuna'nın aldığı notların ortalaması :

$$\frac{4+8+7+9+7+10}{6} = \frac{45}{6} = 7{,}5 \text{ tir.}$$

3. Bir futbol takımındaki oyuncuların :

5 ' i 19 yaşında ;
1 ' i 20 yaşında ;
3 ' ü 22 yaşında ;
2 ' si 25 yaşında

dır. Bu futbol takımının oyuncularının yaş ortalamasını bulalım :

5 oyuncunun yaşlarının toplamı $5 \times 19 = 95$;
1 oyuncunun yaşı $1 \times 20 = 20$;
3 oyuncunun yaşlarının toplamı $3 \times 22 = 66$;
2 oyuncunun yaşlarının toplamı $2 \times 25 = 50$
Tüm yaşların toplamı 231

dir. Buna göre takımdaki oyuncuların yaş ortalaması :

$$\frac{231}{11} = 21 \text{ dir.}$$

Bu incelediğimiz örneklerde **aritmetik ortalamayı** bulduk. Birçok sayının aritmetik ortalaması şöyle bulunur :

Verilen sayılar toplanır; bulunan toplam, bu sayıların sayısına bölünür.

2. Orta (Medyan)

Örnekler :

1. "Orta parmak" deyince, sağında ve solunda ikişer parmak bulunan parmağı anlarız.

"Orta kat" sözü ile, üstünde ve altında aynı sayıda katlar bulunan katı anlatırız.

3. "Orta halli" sözünden ne zengin ne de yoksul olan kişiyi anlarız.

4. "Ali orta derecede başarılıdır" denilince, Ali'nin başarısının zayıf ile iyi arasında olduğu anlaşılır.

5. "Bir doğru parçasının orta noktası" denilince bu doğru parçasının uçlarından eşit uzaklıkta bulunan noktayı düşünürüz.

6. Büyüklük sırasına göre yazılmış

$$5\ ,\ 7\ ,\ 8$$

sayıları arasında orta sayı 7 dir. Ama 5 , 7 ve 8 in aritmetik ortalaması

$$\frac{5+7+8}{3} = 6{,}6 \quad \text{dır.}$$

7. Alfabe sırasına göre yazılmış olan, sözgelimi,

$$d\ ,\ e\ ,\ f\ ,\ g\ ,\ h$$

harfleri arasında **orta harf** iki uçtan eşit uzaklıkta bulunan f harfidir.

8. Büyüklük sırasına göre yazılmış olan

$$6,\ 8,\ 10,\ 11,\ 12,\ 14,\ 16,\ 17,\ 18,\ 20$$

sayılar dizisinde iki uçtan ortaya doğru sayalım; tam ortada bir tane sayı yok, iki tane sayı vardır. Bunlar 12 ile 14 tür. Buna göre, baştan ve sondan aynı uzaklıkta olan sayı 12 ile 14 arasında bulunacaktır. Öyleyse verilen sayılar dizisinin **orta sayısı :**

$$\frac{12+14}{2} = 13 \quad \text{tür.}$$

Bu sayıların aritmetik ortalaması ise 13,2 dir. Bu örnekte görüldüğü gibi :

Elemanlarının sayısı çift ve büyüklük sırasına göre sıralanmış olan bir sayılar dizisinin orta sayısı, en ortada bulunan iki sayının aritmetik ortalamasıdır.

Bulunan bu sayı, dizide olmamakla birlikte yine dizinin **orta sayısı (medyanı)** sayılır.

9. Büyüklük sırasına göre yazılmış olan ve tek sayıda elemanı bulunan

$$9,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 14,\ 14,\ 16,\ 18,\ 19,\ 24$$

sayılar dizisinde en ortada 14 olduğu için bu dizinin orta sayısı **(medyanı)** 14 olur. Bu sayıların aritmetik ortalaması ise yaklaşık olarak 14,9 dur.

Bu örnekte, orta sayı 14, aritmetik ortalama 14,9 dur. Görülüyor ki, bu iki sayı birbirine çok yakındır. Aritmetik ortalamayı bulmak için verilen sayıların toplamı bulunmuş ve bu toplam, dizinin eleman sayısına bölünmüştür. Oysa, **orta sayı**'yı bulmak için sadece iki uçtan ortaya doğru sayılarak orta da 14 bulunmuştur. Bu iki işlem karşılaştırılırsa, ikincinin çok daha çabuk ve kolay olduğu açıktır. Bu bakımdan verilen sayılar dizisinin aritmetik ortalamasının ne olduğunu anlamak istersek, çoğu zaman, bu dizinin orta sayısını buluruz. Bu sayı, aritmetik ortalama için bize bir fikir verir.

10. Bir atölyede çalışan 10 işçinin aylık ücretleri sıra ile :

3 250 TL, 3 300 TL, 3 450 TL, 3 450 TL, 3 600 TL, 3 700 TL, 3 750 TL, 3 750 TL, 3 800 TL, 5 100 TL

dır. Bu işçilerin aylık ücretlerinin ortalaması yaklaşık olarak nedir?

Yanıt :

Bu sayılar dizisinin orta sayısı

$$\frac{3\,600+3\,700}{2} = 3\,650 \text{ TL} \quad \text{dır.}$$

Öyleyse, bu işçilerin yaklaşık olarak ortalama aylık ücreti 3 650 TL. dır.

Bu aylık ücretlerin aritmetik ortalaması alınırsa 3 715 TL bulunur.

Bu örnekte, sözgelimi, dizide gördüğünüz son aylık ücret 5100 TL yerine 7 100 TL olsaydı, bu dizinin orta sayısı yine 3 650 olurdu. Oysa dizinin aritmetik ortalaması 3 915 TL dır. Bundan da anlaşılıyor ki, dizinin en ortasında bulunan sayıları değiştirmedikçe bu dizinin orta sayısı değişmez. Ama, dizinin aritmetik ortalaması, dizinin değiştirilen her sayısı ile birlikte değişir.

11. Sınıfınızda bulunan öğrencilerin boylarının ortalamasını bulmak istersek, bu öğrencileri boy sırasına göre dizeriz. Sonra, öğrenci sayısı tek ise en ortadaki öğrencinin boyunu ölçeriz. Bulduğumuz bu boy bu sınıf öğrencileri için **orta boydur.**

Öğrencilerin sayısı çift ise, en ortada bulunan iki öğrencinin boylarının aritmetik ortalamasını alırız. Bu sayı, yine, söz konusu sınıftaki öğrenciler için **orta boydur.**

Bu örnek, bize, orta boyu bulmak için birtakım uzun aritmetik işlemler yapmadan **orta sayı** kavramı ile sonuca daha çabuk ve kolayca varılacağını gösteriyor.

3. Mod (Moda)

Örnekler :

1. Bir iş yerinde çalışan işçilerle bunların gündelik ücretleri aşağıda gösterilmiştir :

Adı ve soyadı	Gündelik ücreti
Ahmet Güven	135 TL
Hasan Yılmaz	140 TL
Hüseyin Çalışkan	145 TL
Mehmet Bükülmez	140 TL
Basri Balcı	150 TL
Ali Güler	140 TL

Bu işçilerin arasında aynı ücreti alan üç işçi vardır. Gündelik ücretlerden meydana gelen sayı dizisinde 140 sayısı üç kez tekrarlanıyor. İşte bu 140 sayısına, bu ücretler dizisinin **mod**'u denir.

2. 12, 13, 15, 15, 15, 19, 21, 29, 29, 29, 30, 35

dizisinde tekrarlanan sayılar 15 ve 29 dur. İşte bu 15 ve 29 sayılarına bu dizinin **mod**'ları denir.

Burada 15 ve 29 aynı sayıda tekrar ediyor. Dizide 29 bir tane daha fazla olsaydı **mod** 29 olurdu.

3. 40 kişilik bir sınıfta 15 öğrencinin boylarının uzunlukları 155 cm. dir. Öbür öğrencilerin boyları da değişik sayılarla gösteriliyor. Bu sayılar 155 sayısı kadar tekrar etmiyor. Bu durumda "sınıftaki öğrencilerin ortalama boyu yaklaşık olarak 155 cm. dir" diyebiliriz.

Sınıftaki öğrencilerin boylarını gösteren sayılar dizisinin **mod**'u 155 tir. Öyleyse **mod** en sade bir ortalama türüdür.

Sözü edilen sınıftaki bir öğrencinin boyunun normal'in üstünde, söz gelimi, 180 cm. olması, **mod**'u etkilemez. Bu sınıfın öğrencileri için ortalama boy yine 155 cm. dir.

4. Bir fabrikada çalışan işçilerin gündelik ücretlerine göre bu işçilerin sayıları aşağıda verilmiştir :

Gündelik Ücretler	İşçi Sayısı
240—245 TL arasında	7
246—250 TL "	15
251—255 TL "	19
256—260 TL "	25
261—265 TL "	16
266—270 TL "	+ 8
Toplam :	90 işçi

Bu çizelgeye göre, bu fabrikadaki işçi grupları arasında en büyük işçi grubu 25 kişidir. Bu grubun aldığı gündelik ücret 256 TL ile 260 TL arasında değişmektedir. Öyleyse bu grubun ortalama ücreti,

$$\frac{256 + 260}{2} = 258 \text{ TL dır.}$$

Buna göre, 90 kişilik işçi kümesinin ücretlerinin **mod**'u 258 TL olur. Başka bir söyleyişle, bu fabrikada çalışan işçinin ortalama gündelik ücreti yaklaşık olarak 258 TL dır.

7-4. ÖRNEKLEME

Örnekler :

1. Bir ortaokulda bulunan 800 öğrencinin geçim durumları hakkında genel bir bilgi edinmek istiyoruz.

Bu konuda bilgi edinmek için bütün öğrencilerin geçim durumlarını incelemek gerekli değildir. Fakat gerçeğe yakın bir bilgi edinmek için değişik aile ortamlarından gelen öğrenci gruplarının geçim koşulları ile ilgili inceleme yapmalıdır. Sözgelimi, memur çocuklarının numaralarını bir torbaya koyarak bunlardan rastgele 25 tanesini çekelim. Bunun gibi, esnaf, tüccar ve işçi, ... çocukları arasında da ad çekme ile 20, 35 ve 20 çocuğun numaralarını çekmiş olalım.

Adçekme ile saptadığımız bu çocukların geçim koşullarını araştırdıktan sonra aşağıdaki sonuçlar elde edilmiş olsun :

45 öğrencinin geçim durumu : orta ;
24 öğrencinin geçim durumu : iyi ;
8 öğrencinin geçim durumu : çok iyi ;
18 öğrencinin geçim durumu : ortanın altında ;
5 öğrencinin geçim durumu : çok yetersiz.

Bu araştırmaya göre çoğunluğun geçim durumunun **orta** olduğu görülür. Okulun bütün öğrencilerinin geçim durumları hakkında araştırma yapmadan bu okuldaki öğrencilerin geçim durumlarının çoğunlukla **orta** olduğu kanısına varabiliriz.

İşte bu yapılan işe **istatistikte örnekleme** diyoruz.

2. Bir okulda öğrenci kooperatifinde satılacak kitaplar hakkında öğrencilerin ne düşündüklerini anlamak için aşağıdaki şekilde bir araştırma yapıyoruz :

Her sınıfta soyadlarının ilk harfleri, sözgelimi, A, D, E, G, S olan öğrencilere, hangi çeşit kitapların koorperatifte satılmasını istediklerini bir kâğıda yazmaları söyleniyor, Sonra bu kâğıtlar toplanarak inceleniyor. Bu incelemeden şu sonuçlar elde ediliyor :

a) 40 öğrenci **küçük öykü kitapları**

b) 18 öğrenci **romanlar**

c) 10 öğrenci **şiir kitapları**

istiyor. Bu araştırmaya giren öğrencilerin çoğunluğu, **küçük öykü kitapları** istiyor. Bu sonucu, okuldaki bütün üğrencilerin isteği olarak kabul edebiliriz. Burada okuldaki bütün öğrencilerin düşüncelerini incelemeden kooperatifte satılacak kitapların türü hakkında genel bir kanıya varıyoruz.

ALIŞTIRMALAR

1. Sınıfınızdaki öğrencilerin hangi futbol takımını tuttuklarını öğrenmek istiyoruz. Adlarının baş harfleri

B, D, F, H, K

olan öğrenciler arasında araştırma yaparak inceleyiniz.

2. Sınıfınızdaki öğrencilerin ortalama ağırlıklarını bulmak için ad çekme ile aranızdan 10 öğrenci seçiniz. Bu öğrencilerin ağırlıkları : 38 kg., 38 kg., 42 kg., 42 kg., 42 kg., 54 kg., 58. kg., 60 kg., 65 kg., dır.

a) Bu sayı dizisinin orta sayısı nedir?

b) Buna göre sınıfınızdaki öğrencilerin ortalama ağırlığı ne olur?

Uygulamalar :

1. Erdal matematik dersinden,

2, 5, 7, 3 ve 4

notlarını almıştır.

a) Erdal'ın aldığı notların aritmetik ortalaması nedir?

b) Bu notlar dizisinin orta sayısı nedir?

Çözüm :

a) Erdal'ın aldığı notların aritmetik ortalaması :

$$\frac{2+5+7+3+4}{2} = \frac{21}{5} = 4{,}2 \text{ dir.}$$

b) Bu notların büyüklük sırasına göre yazılışı

2, 3, 4, 5, 7

olur. Bu dizinin orta sayısı 4 'tür.

Görülüyor ki, aritmetik ortalama ile orta sayı birbirine çok yakındır. Bu bakımdan Erdal'ın matematik dersindeki başarısı, **aritmetik ortalama** ya da **orta sayı** ile değerlendirilebilir.

2. Erdal, sosyal bilgiler dersinden

3, 4, 4, 4, 10

notlarını almıştır.

a) Erdal'ın aldığı notların aritmetik ortalaması nedir?

b) Bu sayı dizisinin orta sayısı nedir?

Çözüm :

a) Aritmetik ortalama,

$$\frac{3+4+4+4+10}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

dir.

b) Bu notlar dizisinin orta sayısı 4 tür.

Burada **aritmetik ortalama** ile **orta sayı** arasındaki fark, birinci örneğe göre daha çoktur. Erdal'ın sosyal bilgiler dersinden orta sayı ile değerlendirilmesi daha normaldir. Çünkü, Erdal'ın 3, 4, 4, 4 notlarını aldıktan sonra bir sıçrama ile 10 alması normal sayılamaz. Bu bakımdan aritmetik ortalama Erdal'ın başarısını doğru olarak

yansıtamaz. Buradaki 10 notu, raslantılı bir nottur. Bu not, bir yana bırakılır ve geri kalan notların aritmetik ortalaması alınırsa 3,75 sayısı bulunur. Bu da **orta sayıya** yakındır. Demek ki, bu örnekte **orta sayı** Erdal'ın sosyal bilgiler dersindeki başarısını daha doğru olarak gösteriyor.

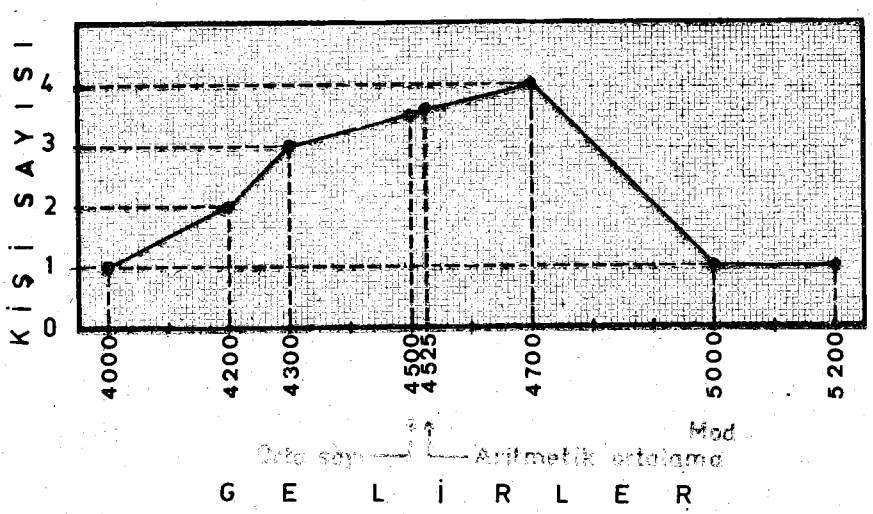
3. Bir fabrikadaki personel arasından gelişi güzel seçilmiş 12 kişinin aylık gelirleri aşağıda gösterilmiştir :

4 000 TL, 4 200 TL, 4 200 TL, 4 300 TL, 4 300 TL, 4 300 TL, 4 700 TL, 4 700 TL, 4 700 TL, 4 700 TL, 5 000 TL, 5 200 TL.

Bu bilgiye göre, fabrikadaki tüm personelin gelir ortalaması için ne söyleyebilirsiniz?

Çözüm :

Bu gelirler, grafikle şöyle gösterilir :



11. Şekil

Bu örnekleme ile bu fabrikadaki tüm personel'in ortalama geliri hakkında bir kanıya varılabilir. Burada, **orta sayı, aritmetik ortalama** ve **mod** birbirine yakındır. Bu nedenle,

4 500 , 4 525 , 4 700 sayılarından herhangi biri, bu fabrikadaki tüm personelin gelir ortalaması olarak alınabilir?

ALIŞTIRMALAR

1. $A = \{1, 3, 7, 9, 11, 5, 17, 19, 13, 15\}$ kümesinin elemanlarının aritmetik ortalamasını bulunuz.

2. 20 ile 50 arasındaki çiftsayıların aritmetik ortalaması nedir? Bunların orta sayısını bulunuz.

3. $B = \{x \mid x$ çiftsayı ve $x \leqslant 26\}$ kümesinin elemanlarını yazınız, sonra bu elemanların **aritmetik ortalamasını** ve **orta sayısını** bulunuz.

4. Tülin sosyal bilgiler dersinden bir karne döneminde

8 , 4 , 6 , 9 , 3

notlarını almıştır.

a) Bu notların aritmetik ortalaması nedir?

b) Bu sayılar dizisinin orta sayısı nedir?

c) Yukarıda bulduğunuz iki sonucu karşılaştırınız.

d) Bu sayılar dizisinde mod var mıdır? Niçin?

5. Bir ortaokulun II-A sınıfından gelişi güzel seçilen 10 erkek öğrencinin boyları :

140 cm., 142 cm., 144 cm., 144 cm., 144 cm., 148 cm., 149 cm., 150 cm., 154 cm., 160 cm. dir.

a) Bu öğrencilerin boylarının **aritmetik ortalaması** nedir?

b) Ortalama boydan daha küçük ya da daha büyük boyda olan kaç öğrenci vardır?

c) Boyları gösteren bu sayılar dizisinin **orta sayısı** nedir?

d) Bu sayılar dizisinde **mod** nedir?

6. Sami fen bilgisi dersinden :

6 , 2 , 4 , 8 , 1

notlarını almıştır.

a) Sami'nin aldığı notların **aritmetik ortalaması** nedir?

b) Bu notlar dizisinin **orta sayısı** nedir?

7. İstanbul'da iki hafta süresince günlük sıcaklık derecelerinin ortalamaları aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir :

Günler	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Sıcaklık Dereceleri	13°	15°	16°	17°	16°	15°	16°	18°	15°	14°	13°	14°	16°	18°

a) Bu sıcaklık derecelerinin **aritmetik ortalamasını** bulunuz.

b) Bu sıcaklık dereceleri dizisinin **orta sayısını** bulunuz.

c) Her bir sıcaklık derecesinin **aritmetik ortalamadan** ne kadar saptığını hesaplayınız.

8. İstanbul'da aylara göre yağış ortalamaları metrekarede kg. olarak aşağıdadır :

Ocak	Şubat	Mart	Nisan	Mayıs	Haziran	Temmuz	Ağustos	Eylül	Ekim	Kasım	Aralık
90,1	79,6	62,9	42,3	30	23,9	21,7	18,9	50,2	63,4	82,4	107,4

İstanbul'da yıllık yağış ortalamasını :

a) **Aritmetik ortalama** yolu ile,

b) **Orta sayısı** bulma yolu ile ,

c) **Mod** yolu ile hesaplayınız.

9. Aşağıda 1970 – 1975 yılları arasında yurdumuza gelen yabancı turistler, yurt dışına geziye çıkan yurttaşlarımız ve hacca giden yurttaşlarımızla ilgili bir çizelge verilmiştir :

Yıllar	1971	1972	1973	1974	1975
Gelen turistler	840 535	920 852	1 313 260	1 001 947	1 119 896
Yurt dışına geziye çıkan yurttaşlarımız	81 611	82 147	105 364	178 939	224 187
Haç için çıkan yurttaşlarımız	12 480	33 011	37 882	17 086	120 344

a) Bunların her biri için 5 yıllık ortalamayı bulunuz.

b) Yurt dışına çıkan bir yurttaşımıza ortalama 500 dolar (yaklaşık olarak 12 000 TL sına karşılık) döviz verildiğine göre, her yıl, yurttaşlarımızın götürdüğü döviz ne kadardır?

c) Her turistin ortalama 250 dolar bozdurduğu varsayılırsa, turistlerin her yıl getirdiği döviz kaç dolardır?

10. Yurdumuzda 1970 den 1975 yılına kadar beş yıl içinde yapılan zeytin üretimi aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir :

Yıllar	1971	1972	1973	1974	1975
Zeytin Üretimi (Ton)	326 000	1 019 000	333 000	840 000	561 000

a) Zeytin üretiminin **yıllık ortalaması** nedir?

b) Bu ortalama üretimden az ya da çok üretim yapılan yıllar hangisidir?

11. Okulunuzda bulunan öğrencilerin :

a) Boylarının **ortalamasını;**

b) Yaşlarının **ortalamasını** bulunuz.

Yol gösterme :

Her sınıftan adçekme ile 10 ar öğrenci seçiniz. Bunların :

a) Boylarının **orta sayısını,**

b) Yaşlarının **orta sayısını** bularak sonuca varınız.

12. 1975 yılı istatistiklerine göre Dünya nüfusu 3 967 000 000 dur. Bu nüfusun dinlere göre dağılımı aşağıdaki çizelgede verilmiştir :

Müslümanlar	:	% 14
Hristiyanlar	:	% 29
Dini saptanamayanlar	:	% 20
Hindular	:	% 13
Konfüçyüsler	:	% 10
Buda Dininde olanlar	:	% 6
Şito, Tao, Musavi vb.	:	% 8

a) Dünya nüfusu yılda % 2 arttığına göre, bulunduğunuz yıl içinde Dünya nüfusu ne kadardır?

b) Bu çizelgeye göre bir daire grafiği çiziniz.

KENDİMİZİ DENEYELİM

TEST SORULARI

1. 2–A sınıfında yapılan matematik sınavlarında Ahmet 2, 7, 4, 5, 8 notlarını aldı. Bu notların **aritmetik ortalaması** nedir?

☐ **a)** 5,2 ; ☐ **b)** 5 ; ☐ **c)** 4 ; ☐ **d)** 5,3 ; ☐ **e)** Hiçbiri .

2. Bir matbaada çalışan işçilerin günlük ücretleri sıra ile 240 TL, 240 TL, 250 TL, 250 TL, 270 TL, 270 TL, 270 TL, 290 TL dır. Bu ücretler dizisinin **modu** nedir?

☐ **a)** 250 TL; ☐ **b)** 240 TL; ☐ **c)** 270 TL;
☐ **d)** 290 TL; ☐ **e)** Hiçbiri

3. Yukarıdaki ücretler dizisinin **orta sayısı (medyanı)** nedir?

☐ **a)** 250 TL; ☐ **b)** 270 TL; ☐ **c)** 260 TL;
☐ **d)** 265 TL; ☐ **e)** 255 TL.

4. $A = \{ x \mid x \text{ çiftsayı ve } x < 20 \}$

kümesinin elemanlarından oluşan sayılar dizisinin **orta sayısı (medyanı)** nedir?

☐ **a)** 8 ; ☐ **b)** 10 ; ☐ **c)** 9 ; ☐ **d)** 11 ; ☐ **e)** 12 .

5. Yukarıdaki A kümesinin elemanlarından oluşan sayılar dizisinin **aritmetik ortalaması** nedir?

☐ **a)** 9 ☐ **b)** 10 ☐ **c)** 11 ☐ **d)** 8 ☐ **e)** 12 .

6. $A = \{ x \mid \text{doğalsayıdır; } x \geqslant 2 \text{ ve } x \leqslant 6 \}$

$B = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$

kümeleri veriliyor. $A \cap B$ kümesinin elemanlarından oluşan sayılar dizisinin **medyanı** nedir?

☐ **a)** 3 ☐ **b)** 4 ☐ **c)** 3,5 ☐ **d)** 2 ☐ **e)** 5.

7. Bir ortaokulun 2–C sınıfında matematik sınavının sonucu aşağıdaki çizelgede gösteriliyor. Bu notlar dizisinin **modu** nedir?

Alınan notlar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Öğrenci sayısı	2	5	5	10	8	6	4	5	3	2

☐ **a)** 5 ☐ **b)** 6 ☐ **c)** 4 ☐ **d)** 3 ☐ **e)** 8

8. Yukarıdaki çizelgeye göre 2–C sınıfındaki öğrencilerin aldıkları notların **aritmetik ortalaması** nedir?

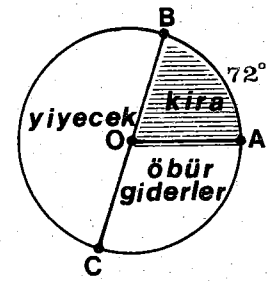
☐ **a)** 5 ; ☐ **b)** 6 ; ☐ **c)** 5,5 ; ☐ **d)** 5,16 ; ☐ **e)** Hiçbiri.

9. Sınavda 5 ve 5 ten yukarı not alanlar başarılı sayılıyor. Yukarıdaki çizelgeye göre 2–C sınıfının **başarı yüzdesi** nedir?

☐ **a)** % 50 ; ☐ **b)** % 52 ; ☐ **c)** % 54 ; ☐ **d)** % 56 ; ☐ **e)** % 60.

10. Bir ailenin gelirinin harcama grafiği "12. şekilde" gösterilmiştir. Bu ailenin kira için ödediği para, gelirinin yüzde kaçıdır?

☐ **a)** % 72 ; ☐ **d)** % 36 ;
☐ **b)** % 25 ; ☐ **e)** % 40 .
☐ **c)** % 20 ;



12. Şekil

11. $A = \{ 1, 2, 3, 7, 9, 10 \}$ ve

$B = \{ 3, 7, 8 \}$

kümeleri veriliyor. $A \cup B$ kümesinin elemanlarından meydana gelen sayılar dizisinin **modu** nedir?

☐ **a)** 3 ☐ **b)** 7 ☐ **c)** 5 ☐ **d)** 8 ☐ **e)** Hiçbiri

12. İstanbul'da bir hafta süre ile her gün belli bir saatta ölçülen sıcaklık dereceleri aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

Günler	Pazartesi	Salı	Çarş.	Perş.	Cuma	Cumartesi	Pazar
Sıcaklık Dereceleri (C)	10°	10°	11°	15°	15°	14°	16°

Ölçünün yapıldığı haftadaki sıcaklık **ortalaması** nedir?

☐ **a)** 15°C ; ☐ **b)** 11°C ; ☐ **c)** 13 C° ;
☐ **d)** 14°C ; ☐ **e)** Hiçbiri.

13. Yukarıdaki çizelgeye göre, bu sıcaklık derecelerinin **modu** veya **modları** nedir?

☐ **a)** 10°C ; ☐ **b)** 15°C ; ☐ **c)** 11°C ;
☐ **d)** 10°C ve 15°C ; ☐ **e)** 14°C .

14. Yukarıdaki çizelgeye göre bu sıcaklık derecelerinin orta sayısı (medyan'ı) nedir?

☐ **a)** 15°C ; ☐ **b)** 11°C ; ☐ **c)** 15°C ;
☐ **d)** 11°C ; ☐ **e)** 13°C .

15. Bir ortaokulda öğrencilerin geçim durumlarını anlamak için bir araştırma yapılıyor. Adçekme ile seçilen 100 öğrencinin geçim durumları şöyle saptanmıştır :

Öğrenci sayısı	Geçim durumu
10	Çok iyi ;
20	İyi ;
40	Orta ;
25	Yetersiz ;
5	Çok yetersiz.

Yapılan bu işleme ne ad verilir?

☐ **a)** Aritmetik ortalama ; ☐ **b)** Medyan ; ☐ **c)** Mod ;
☐ **d)** Örnekleme ; ☐ **e)** İstatistik.

16. 3, 4, 5, 7, 8 sayılar dizisinin ortalaması ile orta sayısı arasındaki fark aşağıdaki sayılardan hangisine eşittir?

☐ **a)** 3 ; ☐ **b)** 2 ; ☐ **c)** 3,5 ; ☐ **d)** 2,6 ; ☐ **e)** 0,4 .

17. Bir istitastik çalışma yapmak için belli özelikleri taşıyan istatistik olaylarını seçme yöntemine ne ad verilir?

☐ **a)** Ortalama bulma ; ☐ **b)** Benzetme ;
☐ **c)** gruplandırma ; ☐ **d)** Örnekleme ; ☐ **e)** Hiçbiri.

18. 9, 7, 10, 7, 6, 3 sayılar dizisinin medyanı aşağıdaki sayılardan hangisidir?

☐ **a)** 9 ☐ **b)** 8 ☐ **c)** 6 ☐ **d)** 8,5 ☐ **e)** 7.

19. $A = \{ x \mid x \in D \text{ , } 1 < x < 20 \text{ ve } x, 6 \text{ ile bölünebilen bir sayı} \}$ kümesi veriliyor. Bu kümenin elemanlarından oluşan sayılar dizisinin medyanı nedir?

☐ **a)** 6 ; ☐ **b)** 12 ; ☐ **c)** 18 ; ☐ **d)** 15 ; ☐ **e)** Hiçbiri.

20. $A = \{ x \mid x \in D \text{ ve } 1 < x \leqslant 9 \}$

kümesi ile verilen sayılar dizisinin aritmetik ortalaması aşağıdaki sayılardan hangisidir?

☐ **a)** 6 ; ☐ **b)** 5,5 ; ☐ **c)** 7 ; ☐ **d)** 4 ; ☐ **e)** 6,5.

8. BÖLÜM ÇOK BÜYÜK VE ÇOK KÜÇÜK SAYILAR

Konunun Ayrıntıları

8–1. Çok Büyük Sayıların Yazılması ve Okunması
8–2. Çok Büyük Sayılarla Yapılan Dört İşlem
8–3. Çok Küçük Sayıların Yazılması ve Okunması
8–4. Çok Küçük Sayılarla Yapılan Dört İşlem

8–1. ÇOK BÜYÜK SAYILARIN YAZILMASI VE OKUNMASI

1. 10 Sayısının Pozitif Üsleri

Örnekler :

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1\,000\,000$$

olduğunu biliyorsunuz. Bunu,

$$\underbrace{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}_{\textbf{6 tane çarpan}} = 10^6$$

biçiminde de gösterebiliriz. Bu sayıyı,

"10 üssü 6"

diye okuruz. Bunun gibi,

$$10^9 = \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}_{\textbf{9 tane çarpan}} = 1\,000\,000\,000$$

dır. Bunu **"10 üssü 9"** diye okuruz. Bu sayıyı,

$$10^9 = 10 \times 10^8 = 100 \times 10^7 = \ldots$$

biçimlerinde de gösterebiliriz.

$10^2, 10^3, 10^6, 10^7, 10^9, \ldots$ biçiminde yazılan sayılara **üslü nicelikler** adını vereceğiz. Burada,

$100 = 10^2$ ye 10 un **karesi**
$1\,000 = 10^3$ e 10 un **küpü**
$10\,000 = 10^4$ e 10 un **dördüncü gücü** (kuvveti)
$1\,000\,000 = 10^6$ ya 10 un **altıncı gücü**

denir.

10^6 biçimindeki bir üslü niceliğin sayı değerini bulmak gerektiği zaman

$$10^6 = \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}_{\textbf{6 tane çarpan}} = 1\,000\,000$$

yazılır. Bunu sözle anlatalım :

"10^6 nın sayı değeri, 10 un 6 kez kendisi ile çarpılmasından elde edilen sayıdır".

10^6 sayısını pratik olarak elde etmek için 1 in önüne 6 tane 0 (sıfır) yazmak yeter.

10^{12} sayısını elde etmek için 1 in önüne 12 tane 0 koymak yeter.

$10^{12} =$ 1 000 000 000 000 = bir trilyon
$10^{15} =$ 1 000 000 000 000 000 = bir katrilyon
$10^{18} =$ 1 000 000 000 000 000 000 = bir kentilyon
$10^{20} =$ 100 000 000 000 000 000 000 = yüz kentilyon
$10^{21} =$ 1 000 000 000 000 000 000 000 = bin kentilyon

diyebiliriz. Fakat daha büyük sayıları yazmak ve okumak için yeni sözcükler gerekir. Her büyük sayı için sözcük bulmak zor olur. Bu nedenle, **üslü nicelik** şeklinde yazma biçimi, çok büyük sayıları kısaca yazmamızı ve okumamızı sağlar. Söz gelimi $\mathbf{2{,}1 \times 10^{21}}$ sayısını

"2,1 çarpı 10 üssü 21"

diye okuruz.

2. Çok Büyük Sayıları Bilimsel Biçimde Göstermek

Yer'in yıldızlara ve yıldızların birbirlerine olan uzaklıkları km. türünden çok büyük sayılardır. Sözgelimi, Yer'in Güneş'e uzaklığı 149 600 000 km. dir. Yaklaşık olarak bunu 150 000 000 km. alabiliriz. Bu uzaklığı kısaca,

150 000 000 km. $= 15 \times 10\,000\,000 = 15 \times 10^7$ km. ya da

150 000 000 km. $= 1{,}5 \times 100\,000\,000$ km. $= 1{,}5 \times 10^8$ km.

şeklinde bir **üslü nicelik** olarak gösterebiliriz. Böylece, verilen büyük sayı **bilimsel biçimde** yazılmış olur.

Genel olarak, bir S sayısı verildiği zaman, $1 < a \leqslant 10$ ve n bir tamsayı olmak üzere, bu sayı

$$S = a \times 10^n$$

şeklinde bir **üslü nicelik** olarak yazılırsa, S sayısı **bilimsel biçimde** gösterilmiş olur.

150 000 000 $= 1{,}5 \times 10^8$ sayısını,

"1,5 çarpı 10 üssü 8"

diye okuruz. Bunun sayı değerini bulmak için 1,5 sayısı 100 000 000 ile çarpılır. Bunun için de virgül sekiz basamak sağa götürülür ve 150 000 000 (yüzelli milyon) sayısı bulunur.

Burada $1{,}5 \times 10^8$ gibi **üslü nicelik** biçiminde gösterilen çok büyük bir sayının, sözgelimi, 5,2 katını bulmak için baştaki 1,5 **katsayısını** 5,2 ile çarpmak yeter :

$$5{,}2 \times (\mathbf{1{,}5 \times 10^8}) = (5{,}2 \times 1{,}5) \times 10^8 = 7{,}8 \times 10^8$$

olur. (Burada çarpmanın **birleşme özeliği** uygulandı.)

Bunun gibi, $1{,}5 \times 10^8$ sayısını 3 ile bölelim :

1,5 sayısını 3 ile bölmemiz yeter :

$$\frac{1{,}5 \times 10^8}{3} = \frac{1{,}5}{3} \times 10^8 = 0{,}5 \times 10^8$$

dir.

Yer, Ay, Güneş ve yıldızların yapılarını, birbirine uzaklıklarını ve öteki özeliklerini inceleyen bilim dalına **Astronomi** adı verilir.

Yer, Ay, Güneş ve yıldızların ortak adı **Gökcismidir.** Yer'in Güneş'e olan uzaklığını, gezegenlerin Güneş'e uzaklıklarını hesaplamada **1 birim** olarak alırız. Bunu kısaca,

150 000 000 km. $= 1$ **A. B.**

şeklinde yazar ve

"1 astronomi birimi"

diye okuruz.

Aşağıda, Yer gibi Güneş etrafında dolanan gezegenlerin Güneş'e olan ortalama uzaklıkları "A. B." olarak sıralanmıştır :

Merkür	**Venüs**	**Yer**	**Mars**	**Jüpiter**	**Satürn**
0,4	0,7	1	1,5	5,2	9,6

Uranüs	**Nepton**	**Plüton**
19,2	30	40

1 A. B. = 150 000 000 km. = 15 × 10^7 km. = 1,5 × 10^8 km. olduğuna göre, gezegenlerin Güneş'e uzaklıklarını **üslü nicelikler** olarak yazalım :

Merkür'ün Güneşe uzaklığı : 0,4 × 15 × 10^7 = 6 × 10^7 km.
Venüs'ün " " : 0,7 × 1,5 × 10^8 = 10,5 × 10^8 km.
Mars'ın " " : 1,5 × 1,5 × 10^8 = 2,25 × 10^8 km.
Jüpiter'in " " : 5,2 × 1,5 × 10^8 = 7,8 × 10^8 km.
Satür'ün " " : 9,6 × 1,5 × 10^8 = 1,44 × 10^9 km.
Uranüs'ün " " : 19,2 × 1,5 × 10^8 = 2,88 × 10^9 km.
Neptün'ün " " : 30 × 1,5 × 10^8 = 4,5 × 10^9 km.
Plüton'un " " : 40 × 1,5 × 10^8 = 6 × 10^9 km.
olur.

Yıldızlar arasındaki uzaklıklar, bu bulduğumuz uzaklıklardan çok daha büyüktür. Bu uzaklıkları hesaplarken **ışık yılı** denilen bir birim de kullanılır. Işığın saniyede hızın 300 000 km. dir. Işığın bu hızla bir yılda aldığı yolun uzunluğuna **ışık yılı** denir. Buna göre,

1 **gün** = 24 × 60 = 86 400 **saniye**

1 yıl = 365 **gün** 6 **saat** = 365,25 **gün**

olduğundan

1 **ışık yılı** = 365,25 × 86 400 × 300 000 km.

ve yaklaşık olarak

1 ışık yılı = 9,5 × 10^{12} km.

olur.

Kutup yıldızı'nın ışığı Yer'e 470 yılda gelmektedir. Kutup Yıldızının yeryüzüne uzaklığını km. türünden yazalım :

1 yılda ışığın aldığı yolun uzunluğu 9,5 × 10^{12} km. olduğundan 470 yılda ışığın aldığı yolun uzunluğu S ile gösterilirse,

S = 470 × 9,5 × 10^{12} = 4 465 × 10^{12} = 4,465 × 10^{15} km.

dir. Üslü nicelik şeklinde gösterilen bu uzaklığın sayı değerini bulmak için 4 465 in önüne 12 tane 0 (sıfır) koymak yeter.

4 465 × 10^{12} km. = 4 465 000 000 000 000 km. ≈ 4 kentilyon 465 katrilyon km. dir.

4,465 ≈ 4,5 olduğundan S sayısı, kısaca,

S ≈ 4,5 × 10^{15}

biçiminde yazılabilir.

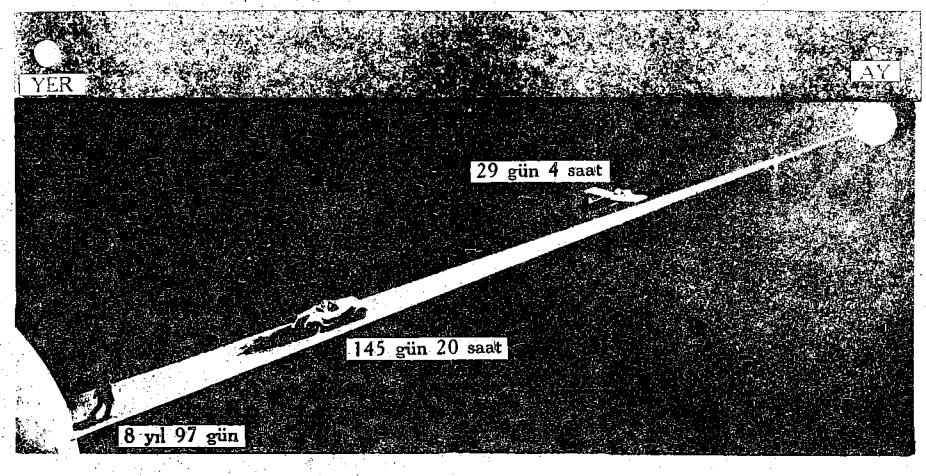
Vega yıldızının Yer'e uzaklığı 26 ışık yılıdır. Bunu km. olarak yazalım :

26 **ışık yılı** = 26 × 9,5 × 10^{12} km. = 247 × 10^{12} km.

olur. Bunun sayı değerini yazmak için 247 nin önüne 12 tane 0 (sıfır) koymak yeter.

Üslü nicelik biçiminde kolayca yazdığımız bu sayılar, gerçekte çok büyük sayılardır. Bu sayıların büyüklüğü hakkında bir fikir edinmek için şu örneği inceleyiniz :

Yer'e en yakın gökcismi olan Ay'ın, Yer'e olan uzaklığı 384 000 km. dir. Böyle uzun bir yolu (eğer mümkün olsaydı) bir yayanın, bir otomobilin, bir uçağın ne kadar zamanda gidebileceğini aşağıdaki şemada görüyorsunuz.



Öbür yıldızların arasındaki uzaklıklar yanında Ay'ın Yer'e uzaklığı oldukça küçük kalır. Onun için yukarıdaki örnek, bize yıldızların Yer'e ve birbirine olan uzaklıklarının ne kadar büyük sayılar olduğunu anlatmaya yeter.

8-2. ÇOK BÜYÜK SAYILARLA YAPILAN DÖRT İŞLEM

1. Toplama ve Çıkarma

Örnekler:

1. $\mathbf{T = 2{,}4 \times 10^{12} + 3{,}2 \times 10^{12} = ?}$

Çarpmanın toplama üzerine dağılma özeliğine göre:

$$T = (2{,}4 + 3{,}2) \times 10^{12} = 5{,}6 \times 10^{12}$$

bulunur. Bu sonuç, 56×10^{11} biçiminde de gösterilebilir. Çünkü:

$5{,}6 \times 10^{12} = 5\ 600\ 000\ 000\ 000 = 5$ trilyon 600 milyar

$56 \times 10^{11} = 5\ 600\ 000\ 000\ 000 = 5$ trilyon 600 milyar

dır. Birincide virgül 12 basamak sağa götürülmüş; ikincide ise, 56 nın önüne 11 tane 0 (sıfır) konulmuştur. Böylece aynı sonuca varılmıştır.

Demek ki, 5,6 katsayısı, 10 kat büyütülüp 56 yapılınca, 10^{12} üslü niceliğin üssünü 1 eksiltmek gerekmektedir.

2. $\mathbf{T = 5{,}52 \times 10^{21} + 9{,}4 \times 10^{21} = ?}$

Çarpmanın toplama üzerine dağılma özeliğine göre:

$$T = (5{,}52 + 9{,}4) \times 10^{21} = 14{,}92 \times 10^{21}$$

olur. Bu savı.

$$1\ 492 \times 10^{19}$$

şeklinde de yazılabilir mi?

3. $\mathbf{F = 6{,}2 \times 10^{18} - 4{,}8 \times 10^{18} = ?}$

Çarpmanın çıkarma üzerine dağılma özeliğine göre:

$$F = (6{,}2 - 4{,}8) \times 10^{18} = 1{,}4 \times 10^{18}$$

bulunur. Bu sonucu,

$$14 \times 10^{17}$$

biçiminde de yazabilir miyiz?

4. $\mathbf{T = 1{,}2 \times 10^{9} + 5{,}3 \times 10^{8} = ?}$

toplama işlemini yapmak için önce,

$$10^{9} = 10 \times 10^{8}$$

olduğunu dikkate alırız ve

$$1{,}2 \times 10^{9} = 1{,}2 \times 10 \times 10^{8} = 12 \times 10^{8}$$

yazarız. Buna göre istenen toplam:

$$1{,}2 \times 10^{9} + 5{,}3 \times 10^{8} = 12 \times 10^{8} + 5{,}3 \times 10^{8}$$
$$= (12 + 5{,}3) \times 10^{8} = 17{,}3 \times 10^{8}$$

bulunur. Bu sonucu,

$$173 \times 10^{7}$$

biçiminde de yazabilir miyiz?

5. $\mathbf{T = 0{,}04 \times 10^{12} + 1{,}2 \times 10^{9} = ?}$

$$10^{12} = \underbrace{(10\times10\times10)}_{1000} \times \underbrace{(10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10)}_{10^{9}}$$

olduğundan,

$$10^{12} = 1\ 000 \times 10^{9}$$

yazılır. Buna göre,

$$0{,}04 \times 10^{12} = 0{,}04 \times 1\ 000 \times 10^{9} = 40 \times 10^{9}$$

olur. Öyleyse, istenen toplam:

$$T = 0{,}04 \times 10^{12} + 1{,}2 \times 10^{9} = 40 \times 10^{9} + 1{,}2 \times 10^{9}$$
$$= (40 + 1{,}2) \times 10^{9} = 41{,}2 \times 10^{9}$$

olarak bulunur.

6. $\mathbf{F = 0{,}2 \times 10^{21} - 7{,}5 \times 10^{19}}$

10^{21} sayısı, 21 tane 10 un kendisiyle arka arkaya çarpımıdır. Oysa 2 tane 10 un kendisiyle çarpımı 10 ve geriye kalan 19 tane 10 'un kendisi ile arka arkaya çarpımı da kısaca 10^{19} olduğundan,

$$10^{21} = 100 \times 10^{19}$$

yazılır. Buna göre,

$$0{,}2 \times 10^{21} = 0{,}2 \times 100 \times 10^{19} = 20 \times 10^{19}$$

olur. Öyleyse, istenen fark:

$$F = 0{,}2\times10^{21} - 7{,}5\times10^{19} = 20\times10^{19} - 7{,}5\times10^{19} = 12{,}5\times10^{19}$$
$$= 1{,}25\times10^{20}$$

bulunur.

2. Çarpma İşlemi

Örnekler :

1. $10^5 \times 10^7 = ?$

$$10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$$
$$10^7 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$$

olduğundan,

$$10^5 \times 10^7 = \underbrace{(10\times10\times10\times10\times10)}_{\text{5 tane çarpan}} \times \underbrace{(10\times10\times10\times10\times10\times10\times10)}_{\text{7 tane çarpan}}$$

$$10^5 \times 10^7 = 10^{12}$$

olur.

$$12 = 5 + 7$$

olduğundan

$$10^5 \times 10^7 = 10^{5+7}$$

olduğu anlaşılır. Demek ki :

10 un çeşitli güçlerini çarparken, üslerinin toplamı olan sayı 10 un üzerine üs olarak yazılır.

2. $10^5 \times 10^{12} \times 10^{18} = 10^{5+12+18} = 10^{35}$

olur.

3. $(9{,}5 \times 10^{12}) \times (2{,}4 \times 10^{18}) = ?$

Çarpma işleminde birleşme ve değişme özeliği olduğundan :

$$(9{,}5\times10^{12}) \times (2{,}4\times10^{18}) = (9{,}5\times2{,}4) \times (10^{12}\times10^{18})$$
$$= 22{,}8 \times 10^{12+18}$$
$$= 22{,}8 \times 10^{30}$$

bulunur.

4. $(2{,}1 \times 10^{21}) \times (5 \times 10^{15}) = ?$

Çarpma işleminde birleşme ve değişme özeliği olduğundan, bu işlem :

$(2{,}1 \times 5) \times (10^{21} \times 10^{15}) = 10{,}5 \times 10^{21+15} = 10{,}5 \times 10^{36}$

şeklinde sonuçlanır.

5. $Ç = (1{,}5 \times 10^8 + 0{,}2 \times 10^{10}) \times (0{,}4 \times 10^{12}) = ?$

Önce birinci parantez içindeki toplama işlemini yapalım:

$$10^{10} = 10^2 \times 10^8 = 100 \times 10^8$$

olduğundan,

$$0{,}2 \times 10^{10} = 0{,}2 \times 100 \times 10^8 = 20 \times 10^8$$

dir. Çarpmanın toplama üzerine dağılma özeliğine göre birinci parantezin içi :

$$1{,}5 \times 10^8 + 20 \times 10^8 = (1{,}5 + 20) \times 10^8 = 21{,}5 \times 10^8$$

olur. Öyleyse, istenen çarpım :

$$Ç = (21{,}5 \times 10^8) \times (0{,}4 \times 10^{12})$$

biçiminde yazılır. Çarpmanın birleşme ve değişme özeliklerine göre,

$$Ç = (21{,}5 \times 0{,}4) \times (10^8 \times 10^{12})$$
$$= 8{,}6 \times 10^{8+12}$$
$$= 8{,}6 \times 10^{20}$$

bulunur.

3. Bölme İşlemi

Örnekler :

1. $$\frac{10^8}{10^5} = \frac{10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10}{10\times10\times10\times10\times10}$$

dir. Görülüyor ki :

Bölünende 8 tane 10 çarpanı
Bölende de 5 tane 10 çarpanı

vardır. Sadeleştirme sonunda geriye $8 - 5 = 3$ tane $10^\bullet$ çarpanı kalır. Öyleyse :

$$\frac{10^8}{10^5} = 10^{8-5} = 10^3 \quad \text{olur.}$$

2. $$\frac{10^{21}}{10^{15}} = 10^{21-15} = 10^6 \quad \text{olur.}$$

3. $$\frac{10^6}{10^6} = 10^{6-6} = 10^0 \quad \text{olur.}$$

Bir uylaşım olarak, $10^0 = 1$ ile gösterilir.

4. $$B = \frac{2{,}6 \times 10^{21}}{0{,}5 \times 10^{12}} = ?$$

$$B = \frac{2{,}6}{0{,}5} \times \frac{10^{21}}{10^{12}} = 5{,}2 \times 10^{21-12} = 5{,}2 \times 10^{9}$$

bulunur.

5. $$B = \frac{0{,}04 \times 10^{25}}{1{,}5 \times 10^{18}} = ?$$

$$0{,}04 \times 10^{25} = 40 \times 10^{22}$$

$$1{,}5 \times 10^{18} = 15 \times 10^{17}$$

olduğundan,

$$B = \frac{40}{15} \times \frac{10^{22}}{10^{17}} = \frac{8}{3} \times 10^{5}$$

bulunur. $\frac{8}{3} = 2{,}66 \ldots$ dır. Buna göre

$$B = (2{,}66 \ldots) \times 10^{5}$$

biçiminde de gösterilebilir.

ALIŞTIRMALAR

A Grubu :

1. a) $5 \times (2{,}4 \times 10^{21}) = ?$

b) $12 \times (1{,}5 \times 10^{18}) = ?$

c) $0{,}25 \times (3{,}2 \times 10^{25}) = ?$

2. $0{,}025 \times 10^{32}$ üslü niceliğinin değerini değiştirmeden katsayısını :

a) 10 kat ; b) 100 kat ; c) 1 000 kat büyütünüz.

3. Aşağıdaki toplama işlemlerini yapınız :

a) $3{,}6 \times 10^{18} + 4{,}2 \times 10^{18} = ?$

b) $1{,}2 \times 10^{12} + 0{,}04 \times 10^{14} = ?$

c) $1{,}5 \times 10^{21} + 10^{22} = ?$

d) $18 \times 10^{18} + 2{,}1 \times 10^{21} = ?$

B Grubu :

4. Aşağıdaki çıkarma işlemlerini yapınız :

a) $4{,}8 \times 10^{27} - 3{,}6 \times 10^{27} = ?$

b) $144 \times 10^{21} - 0{,}4 \times 10^{23} = ?$

c) $288 \times 10^{25} - 1{,}88 \times 10^{27} = ?$

d) $0{,}2 \times 10^{18} - 0{,}5 \times 10^{17} = ?$

5. İkizler burcunun Kastor Yıldızı Gökyüzü'nün en parlak yıldızlarından biridir. Bu yıldızın ışığı Yer'e 380 yılda gelmektedir. Bu yıldızın Yer'e uzaklığını km. türünden üslü nicelik olarak yazınız.

C Grubu :

6. Aşağıdaki karışık işlemleri yapınız; sonra ? işaretleri yerine konulması gereken sayıları bulunuz?

a) $1{,}5 \times 10^{30} - 3 \times 10^{30} + 0{,}02 \times 10^{32} = ?$

b) $0{,}18 \times 10^{34} - 138 \times 10^{32} + 1{,}02 \times 10^{35} = ? \times 10^{34}$

c) $2{,}5 \times 10^{21} - 12 \times 10^{20} - 78 \times 10^{19} = ? \times 10^{20}$

7. Güneş yüzeyinden bir saniyede çıkan enerji miktarı $5{,}5 \times 10^{27}$ kaloridir. Bir günde Güneş yüzeyinden çıkan enerji kaç kalori olur?

8. Aşağıdaki çarpma işlemlerini yapınız :

a) $(2{,}5 \times 10^{21}) \times 10^{20} = ?$

b) $(1{,}5 \times 10^{30}) \times (1{,}2 \times 10^{20}) = ?$

c) $(2{,}4 \times 10^{15}) \times (1{,}5 \times 10^{12} + 10^{13}) = ?$

d) $(0{,}4 \times 10^{21} + 0{,}06 \times 10^{22}) \times (10^{8} + 10^{9}) = ?$

9 Aşağıdaki bölme işlemlerini yapınız?

a) $\frac{2{,}7 \times 10^{25}}{1{,}8 \times 10^{15}} = ?$ b) $\frac{2{,}1 \times 10^{32}}{1{,}4 \times 10^{18}} = ?$

c) $\frac{10^{29}}{5 \times 10^{21}} = 2 \times ?$ d) $\frac{0{,}3 \times 10^{32}}{1{,}5 \times 10^{30}} = ?$

10. Yer'e en yakın sabit yıldızın uzaklığı 4,3 ışık yılıdır. Bunu km. türünden yazınız.

11. Hızı 10 km./saniye olan bir füze :

a) Ay'a, b) Venüs'e ; c) Mars'a ; d) Jüpiter'e ne kadar zaman da varabilir?

8–3. ÇOK KÜÇÜK SAYILARIN YAZILMASI VE OKUNMASI

10 Sayısının Negatif Güçleri

Örnekler :

			Okunması
0,1	=	$\frac{1}{10}$	Onda–bir
0,01	=	$\frac{1}{100}$	Yüzde–bir
0,00 1	=	$\frac{1}{1\,000}$	Binde–bir
0,00 000 1	=	$\frac{1}{1\,000\,000}$	Milyonda–bir
0,00 000 000 1	=	$\frac{1}{1\,000\,000\,000}$	Milyarda–bir

Bu örnekleri istediğimiz kadar çoğaltabiliriz.

Hidrojenin yoğunluğu : $0{,}00\ 009 = \frac{9}{100\,000}$ (yüzbinde–dokuz) ;

Havanın yoğunluğu : $0{,}00\ 129 = \frac{129}{100\,000}$ (yüzbinde–yüz yirmi dokuz)

dur. Bunlar gibi birçok gazların yoğunlukları da **çok küçük sayılardır.**

Fen bilgisi derslerinde kullandığınız verniyeli kompas ya da mikrometre gibi araçlarla yapılan ölçmeler sonunda çok küçük sayılar elde edilir. Bu çok küçük sayılarla işlemler yapmak için bunları daha kısa olarak **bilimsel biçimde** nasıl yazabileceğimizi araştıralım :

$\frac{10^4}{10^7}$ bölmesini ele alalım :

$$\frac{10^4}{10^7} = \frac{10\times10\times10\times10}{10\times10\times10\times10\times10\times10\times10} = \frac{1}{10\times10\times10} = \frac{1}{10^3}$$

tür. Bu sayıyı

$$\frac{1}{10^3} = 10^{-3}$$

biçiminde göstereceğiz ve

"10 üssü eksi 3"

diye okuyacağız.

Bunun gibi,

Küçük Sayılar			Okunması
0,1 =	$\frac{1}{10}$	$= 10^{-1}$	«10 üssü –1»
0,01 =	$\frac{1}{100}$	$= \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$	«10 üssü –2»
0,00 1 =	$\frac{1}{1\,000}$	$= \frac{1}{10^3} = 10^{-2}$	«10 üssü – 3»
0,00 0 1 =	$\frac{1}{10\,000}$	$= \frac{1}{10^4} = 10^{-4}$	«10 üssü –4»
0,00 00 1 =	$\frac{1}{100\,000}$	$= \frac{1}{10^5} = 10^{-5}$	«10 üssü –5»
0,00 000 1 =	$\frac{1}{1\,000\,000}$	$= \frac{1}{10^6} = 10^{-6}$	«10 üssü –6»
0,00 000 000 1 =	$\frac{1}{1\,000\,000\,000}$	$= \frac{1}{10^9} = 10^{-9}$	«10 üssü –9»
0,00 000 000 000 1 =	$\frac{1}{1\,000\,000\,000\,000}$	$= \frac{1}{10^{12}} = 10^{-12}$	«10 üssü –12»
0,00 000 000 000 000 1=	$\frac{1}{1\,000\,000\,000\,000\,000}$	$= \frac{1}{10^{15}} = 10^{-15}$	«10 üssü –15»

olur.

Uygulamalar :

1. Hidrojenin yoğunluğu 0,00 009 dur. **negatif üssü nicelik** olarak yazınız.

Çözüm :

$0,\ 00\ 009 = 9 \times 0{,}00\ 001$ ve $0{,}00\ 001 = 10^{-5}$

olduğundan

$$0{,}00\ 009 = 9\times10^{-5}$$

şeklinde yazılır.

Böylece, verilen çok küçük sayı **bilimsel biçimde** gösterilmiş olur.

2. Havanın yoğunluğu 0,00 129 dur. Bunu, **negatif üslü nicelik** olarak yazınız.

Çözüm :

$$0,\ 00\ 129 = 129 \times 0{,}00\ 001 = 129 \times 10^{-5}$$

dir.

3. 0,00 000 17 sayısını **negatif üslü nicelik** olarak yazınız.

Çözüm :

$$0{,}00\ 000\ 17 = 17 \times 0{,}00\ 000\ 01 = 17 \times 10^{-7}$$

olur. Bunu şöyle de yazabiliriz :

$$0{,}00\ 000\ 17 = 1{,}7 \times 0{,}00\ 000\ 1 = 1{,}7 \times 10^{-6}$$

Demek ki, 17×10^{-7} biçimindeki bir üslü niceliğin katsayısı 10'a bölününce, 10^{-7} nin üssü bir artarak -6 olur.

4. $4{,}3 \times 10^{-3}$ negatif üslü niceliğinin katsayısı 10 kat büyütülünce 10 un üssü nasıl değişir?

Çözüm :

$$4{,}3 \times 10^{-3} = 4{,}3 \times 0{,}00\ 1 = 0{,}00\ 43$$

dür. Oysa,

$$0{,}00\ 43 = 43 \times 0{,}00\ 01 = 43 \times 10^{-4}$$

tür. Bunlara göre,

$$4{,}3 \times 10^{-3} = 43 \times 10^{-4}$$

olur. Şu halde katsayısı 10 kat büyütülünce 10 un üssü 1 eksilir.

5. $7{,}65 \times 10^{-7} = 7{,}65 \times 0{,}00\ 000\ 01 = 0{,}00\ 000\ 076\ 5$ tir.

6. $3{,}4 \times 10^{-6} = 0{,}00\ 000\ 34$ tür.

7. $0{,}00\ 000\ 65 = 6{,}5 \times 10^{-6}$ dır.

8. $S = 1{,}2 \times 10^{-6}$ sayısının :

a) 2 ya da 3 katını alınız.

b) 2 ya da 3 e bölümünü bulunuz.

Çözüm :

a) $2\,S = 2 \times (1{,}2 \times 10^{-6}) = (2 \times 1{,}2) \times 10^{-6} = 2{,}4 \times 10^{-6}$

$3\,S = 3 \times (1{,}2 \times 10^{-6}) = (3 \times 1{,}2) \times 10^{-6} = 3{,}6 \times 10^{-6}$

olur. Demek ki :

Negatif üslü bir niceliğin 2 ya da 3, ... katını almak için, yalnız katsayısını, 2 ya da 3, ... ile çarpmak yeter.

b) $\frac{S}{2} = \frac{1{,}2 \times 10^{-6}}{2} = \frac{1{,}2}{2} \times 10^{-6} = 0{,}6 \times 10^{-6}$

$$\frac{S}{3} = \frac{1{,}2 \times 10^{-6}}{3} = \frac{1{,}2}{3} \times 10^{-6} = 0{,}4 \times 10^{-6}$$

olur. Demek ki :

Negatif üslü bir niceliği 2 ya da 3 e bölmek için yalnız katsayısını 2 ya da 3 e bölmek yeter.

8-4. ÇOK KÜÇÜK SAYILARLA YAPILAN DÖRT İŞLEM

1. Toplama ve Çıkarma

Örnekler :

1. $\mathbf{T = 8{,}85 \times 10^{-6} + 0{,}15 \times 10^{-6} = ?}$

Çarpmanın toplama üzerine dağılma özeliğine göre :

$$T = (8{,}85 + 0{,}15) \times 10^{-6} = 9 \times 10^{-6}$$

bulunur.

2. $\mathbf{T = 1{,}7 \times 10^{-9} + 2{,}5 \times 10^{-9} = ?}$

Çarpmanın toplama üzerine dağılma özeliğine göre :

$$T = (1{,}7 + 2{,}5) \times 10^{-9} = 4{,}2 \times 10^{-9}$$

bulunur.

3. $\mathbf{T = 1{,}5 \times 10^{-8} + 0{,}3 \times 10^{-7} = ?}$

$$0{,}3 \times 10^{-7} = 3 \times 10^{-8}$$

olduğundan istenen toplam :

$$T = (1{,}5 + 3) \times 10^{-8} = 4{,}5 \times 10^{-8}$$

olur.

4. $\mathbf{F = 0{,}6 \times 10^{-6} - 0{,}4 \times 10^{-6} = ?}$

Çarpmanın çıkarma üzerine dağılma özeliğine göre,

$$F = (0{,}6 - 0{,}4) \times 10^{-6} = 0{,}2 \times 10^{-6}$$

bulunur.

5. $F = 0{,}5 \times 10^{-9} - 2 \times 10^{-10}$

$0{,}5 \times 10^{-9} = 5 \times 10^{-10}$

olduğundan istenen fark :

$F = 5 \times 10^{-10} - 2 \times 10^{-10} = (5 - 2) \times 10^{-10} = 3 \times 10^{-10}$

olur.

2. Çarpma İşlemi

Örnekler :

1. $10^{-3} \times 10^{-5} = ?$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} \quad , \quad 10^{-5} = \frac{1}{10^5}$$

olduğundan

$$10^{-3} \times 10^{-5} = \frac{1}{10^3 \times 10^5} = \frac{1}{10^8} = 10^{-8}$$

olur. Öyleyse,

$$10^{-3} \times 10^{-5} = 10^{(-3)+(-5)} = 10^{-8}$$

dir.

2. $10^{-7} \times 10^4 = ?$

$$10^{-7} \times 10^4 = \frac{1}{10^7} \times 10^4 = \frac{10^4}{10^7} = \frac{10^4}{10^4 \times 10^3} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$$

olur. Öyleyse,

$$10^{-7} \times 10^4 = 10^{(-7)+(+4)} = 10^{-3}$$

tür. Demek ki :

10 un pozitif ya da negatif güçlerini çarpmak için, üslerin toplamını 10 un üzerine üs olarak yazmak yeter.

3. $Ç = (2{,}4 \times 10^{-6}) \times (1{,}5 \times 10^{-5}) = ?$

Çarpmanın işleminin birleşme ve değişme özeliklerine göre :

$Ç = (2{,}4 \times 1{,}5) \times (10^{-6} \times 10^{-5}) = 3{,}6 \times 10^{(-6)+(-5)} = 3{,}6 \times 10^{-11}$

bulunur.

4. $Ç = (25{,}2 \times 10^{-8}) \times (0{,}5 \times 10^3) = ?$

$Ç = (25{,}2 \times 0{,}5) \times (10^{-8} \times 10^3) = 12{,}6 \times 10^{(-8)+(+3)} = 12{,}6 \times 10^{-5}$

bulunur.

3. Bölme İşlemi

Örnekler :

1. $\frac{10^{-6}}{10^{-4}} = 10^{-6-(-4)} = 10^{-6+4} = 10^{-2}$ dir.

2. $\frac{10^{-12}}{10^{+8}} = 10^{-12-(+8)} = 10^{-20}$ dir.

3. $B = \frac{3{,}6 \times 10^{-18}}{0{,}9 \times 10^{-6}} = ?$

Önce katsayıları böleriz :

$$\frac{3{,}6}{0{,}9} = 4$$

olduğundan

$$B = \frac{3{,}6}{0{,}9} \times \frac{10^{-18}}{10^{-6}} = 4 \times 10^{-18-(-6)} = 4 \times 10^{-18+6} = 4 \times 10^{-12}$$

bulunur.

4. $B = \frac{(2 \times 10^{-12}) \times (1{,}6 \times 10^{-6})}{2{,}5 \times 10^{-20}} = ?$

$$B = \frac{2 \times 1{,}6}{2{,}5} \times \frac{10^{-12} \times 10^{-6}}{10^{-20}} = ?$$

yazılır.

$$\frac{2 \times 1{,}6}{2{,}5} = \frac{3{,}2}{2{,}5} = 1{,}28 \quad \text{ve} \quad 10^{-12} \times 10^{-6} = 10^{-18}$$

olduğundan

$$B = 1{,}28 \times \frac{10^{-18}}{10^{-20}} = 1{,}28 \times 10^{-18-(-20)} = 1{,}28 \times 10^2$$

bulunur.

Bu örneklere göre :

10 un pozitif ya da negatif güçlerini birbirine bölmek için bölünenin üssünden bölenin üssü çıkarılır; elde edilen sonuç 10 a üs olarak verilir.

ALIŞTIRMALAR

A Grubu :

1. $2{,}4 \times 10^{-6}$ sayısının 2 , 3 , 5 katlarını alınız.

2. $3{,}6 \times 10^{-12}$ sayısını sırayla 2, 3, 5 e bölünüz.

3. 3×10^{-18} sayısının değerini değiştirmeden 3 katsayısını :

a) 10, 100, 1 000 kat büyütünüz.

b) 10, 100, 1 000 kat küçültünüz.

4. $A = 0{,}00\ 004\ 5$, $B = 0{,}00\ 000\ 05$

sayılarını üslü nicelik biçiminde yazınız. Sonra :

a) $(A + B)$ yi ; **b)** $(A - B)$ yi ; **c)** $(A \times B)$ yi ; **d)** $\frac{A}{B}$ yi

bulunuz.

5. $A = 0{,}00\ 129$, $B = 0{,}00\ 009$ sayıları havanın ve hidrojenin yoğunluklarını gösteriyor. Bu sayıları üslü nicelik biçiminde yazınız. Sonra 0,2 m^3 hava ile 1,5 m^3 hidrojen karıştırılıyor. Karışımın ağırlığını ton olarak üslü nicelik biçiminde yazınız.

6. 500 tabakalık bir top pelür kâğıdının kalınlığı 2,4 cm. geliyor. Bir tabakanın kalınlığını :

a) cm. türünden üslü nicelik biçiminde yazınız.
b) mm. " " " " "
c) dm. " " " " "
d) m. " " " " "

B Grubu :

7. $3{,}4 \times 10^{-6} + 5{,}67 \times 10^{-6} = ?$

8. $2{,}5 \times 10^{-8} + 0{,}15 \times 10^{-6} = ?$

Yol gösterme :

$0{,}15 \times 10^{-6} = 15 \times 10^{-8}$ olacağını görünüz.

9. $7{,}65 \times 10^{-7} - 10{,}5 \times 10^{-8} = ?$

Yol gösterme :

$10{,}5 \times 10^{-8} = 1{,}05 \times 10^{-7}$ olacağını düşününüz.

C Grubu :

10. $(1{,}2 \times 10^{-12} + 0{,}2 \times 10^{-11}) \times (3{,}5 \times 10^{-8}) = ?$

11. $\dfrac{6 \times 10^{-3} - 5 \times 10^{-4}}{2 \times 10^{-2}} = ?$

12. $\dfrac{1{,}22 \times 10^{-2} - 0{,}2 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-5}} = ?$

13. $1{,}5 \times (5 \times 0{,}00\ 000\ 4) \times 10^3 - 7{,}5 \times (4 \times 10^{-4}) = ?$

Yol gösterme :

$$0{,}00\ 000\ 4 = 4 \times 0{,}00\ 000\ 1 = 4 \times 10^{-6}$$

olacağından

$1{,}5 \times (5 \times 0{,}00\ 000\ 4) \times 10^3 = (1{,}5 \times 5 \times 4) \times (10^{-6} \times 10^3) = 30 \times 10^{-3}$ olur. Sonra işleme devam ediniz.

14. $\dfrac{10 \times (5 \times 10^2) + 5{,}05 \times (2 \times 10^4)}{8 \times 10^{-2}} = ?$

15. $\dfrac{6 \times (4{,}5 \times 10^4)}{10^{-3}} + \dfrac{4 \times (5{,}5 \times 10^5)}{10^{-2}} = ?$

KENDİMİZİ DENEYELİM

TEST SORULARI

1. $5 \times (2{,}4 \times 10^{21}) = ?$

ifadesinin **üslü nicelik** olarak değeri aşağıdakilerden hangisidir?

☐ **a)** $1{,}2 \times 10^{21}$; ☐ **b)** 12×10^{21} ; ☐ **c)** 24×10^{20} ;
☐ **d)** 6×10^{21} ; ☐ **e)** Hiçbiri

2. $\dfrac{0{,}3 \times 10^{32}}{1{,}5 \times 10^{30}} = ?$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

☐ **a)** 10 ; ☐ **b)** $0{,}5 \times 10^2$; ☐ **c)** 5×10^2 ;
☐ **d)** 20 ; ☐ **e)** 2×10^2 .

3. Güneş yüzeyinden 1 saniyede çıkan enerji miktarı $5{,}5 \times 10^{27}$ kaloridir. Bir saatte güneş yüzeyinden çıkan enerji kaç kalori olur?

☐ **a)** 198×10^{27} kalori ; ☐ **b)** $19{,}8 \times 10^{30}$ kalori ;

☐ c) 189×10^{27} kalori ; ☐ d) 189×10^{29} kalori ;
☐ e) Hiçbiri .

4. **1 ışık yılı = $9{,}5 \times 10^{12}$ km.**

dir. Vega Yıldızının Yer'e uzaklığı 26 ışık yılıdır. Bunun **üslü nicelik** olarak yazılışı aşağıdakilerden hangisidir?

☐ a) $24{,}7 \times 10^{12}$ km. ; ☐ b) 247×10^{12} km ;
☐ c) 10^{14} km. ; ☐ d) $2{,}47 \times 10^{13}$ km. ; ☐ e) Hiçbiri

5. $T = 1{,}2 \times 10^{9} + 8 \times 10^{8}$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

☐ a) 2×10^{9} ; ☐ b) 20×10^{9} ; ☐ c) $9{,}2 \times 10^{9}$;
☐ d) $0{,}2 \times 10^{8}$; ☐ e) Hiçbiri

6. $F = 10{,}8 \times 10^{12} - 8 \times 10^{11}$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

☐ a) 10^{13} ; ☐ b) 10^{12} ; ☐ c) 108×10^{11} ;
☐ d) $10{,}8 \times 10^{11}$; ☐ e) 10×10^{11} .

7. $B = \dfrac{2{,}1 \times 10^{30}}{1{,}4 \times 10^{18}}$

bölmesinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

☐ a) $\dfrac{2}{3} \times 10^{12}$; ☐ b) 15×10^{10} ; ☐ c) $1{,}5 \times 10^{10}$;
☐ d) 15×10^{11} ; ☐ e) 3×10^{12} .

8. **S = 0,00 000 045**

sayısını **üslü nicelik** biçiminde yazınız.

☐ a) 45×10^{-8} ; ☐ b) $4{,}5 \times 10^{-10}$; ☐ c) 9×10^{-8} ;
☐ d) $4{,}5 \times 10^{-8}$; ☐ e) 45×10^{-9} .

9. Hidrojenin yoğunluğu 0,00 009 dur. 100 m^3 hidrojenin ağırlığını ton olarak ve **üslü nicelik** biçiminde yazınız.

☐ a) 9×10^{-5} ton; ☐ b) 9×10^{-3} ton; ☐ c) 9×10^{-4} ton;
☐ d) $0{,}9 \times 10^{-6}$ ton; ☐ e) Hiçbiri.

10. $B = \dfrac{10^{-3} \times 2 \times 5 \times 7}{10^{6}}$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

☐ a) $0{,}7 \times 10^{-6}$; ☐ b) 7×10^{8} ; ☐ c) 7×10^{-8} ;
☐ d) 7×10^{-4} ; ☐ e) 70×10^{-3} .

11. **$S \times 10^{5} = 0{,}05$**

eşitliğini sağlayan S nın değeri aşağıdakilerden hangisidir?

☐ a) 5×10^{-7} ; ☐ b) 5×10^{-6} ; ☐ c) 10^{-6} ;
☐ d) 10^{-5} ; ☐ e) 10^{-7} .

12. **$S \times 0{,}00\ 005 = 15$**

eşitliğini sağlayan S nin değeri nedir?

☐ a) 3×10^{-5} ; ☐ b) 3×10^{-6} ; ☐ c) 0,00 03 ;
☐ d) $0{,}3 \times 10^{5}$; ☐ e) 3×10^{5} .

13. $1{,}2 \times 10^{-6}$ üslü niceliğinin değeri değiştirilmeden katsayısı 100 kat büyütülürse, bu üslü nicelik ne şekil alır?

☐ a) 120×10^{-4} ; ☐ b) 120×10^{-5} ; ☐ c) 120×10^{-6} ;
☐ d) 120×10^{-8} ; ☐ e) 120×10^{-9} .

14. 500 tabakalık bir top pelür kâğıdının kalınlığı 2,4 cm. geliyor. Bir tabaka pelür kâğıdının kalınlığı nedir?

☐ a) 48×10^{-3} cm.; ☐ b) $3{,}8 \times 10^{-3}$ cm.; ☐ c) 24×10^{-3} cm.
☐ d) $4{,}8 \times 10^{-6}$ cm.; ☐ e) Hiçbiri.

15. $B = \dfrac{-10^{-2} \times 10^{3}}{10^{-1} \times 10^{7}}$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

☐ a) -10^{5} ; ☐ b) 10^{-5} ; ☐ c) -10^{4} ; ☐ d) 10^{5} ; ☐ e) -10^{-5} .

16. Güneş-Yer uzaklığı $1{,}5 \times 10^{8}$ km. dir. Hızı 1 500 m./s. olan bir füze güneşe kaç saniyede gidebilir?

☐ a) $\dfrac{628}{54} \times 10^{4}$; ☐ b) 600×10^{4} ; ☐ c) 200×10^{4} ;
☐ d) 10^{8} ; ☐ e) Hiçbiri.

17. Bir uzaklığın % 25'i 10^{7} km. dir. Bu uzaklık nedir?

☐ a) 2×10^{7} km.; ☐ b) 4×10^{7} km. ; ☐ c) $\dfrac{10^{7}}{2}$ km. ;
☐ d) 10^{6} km. ; ☐ e) 10^{5} km.

18. $1{,}7 \times 10^{-9}$ üslü niceliğin değerini değiştirmeden katsayısını 100 kez büyütünüz. Bulduğunuz sayı nedir?

☐ **a)** 170×10^{-9} ; ☐ **b)** 17×10^{-11} ; ☐ **c)** 170×10^{-7} ;

☐ **d)** $1{,}7 \times 10^{-11}$; ☐ **e)** $1\,700 \times 10^{-9}$.

19. $A = 0{,}00\,006\,5$ ve $B = 0{,}00\,000\,05$ olduğuna göre

$$\frac{A}{B} \times 10^{-4}$$

ün değeri nedir?

☐ **a)** 13×10^{2} ; ☐ **b)** 13×10^{-3} ; ☐ **c)** 130×10^{-3} ;

☐ **d)** 13×10^{-2} ; ☐ **e)** 13×10^{3} .

20. $0{,}00\,004 = S \times 10^{-5}$ olduğuna göre S 'nin değeri nedir?

☐ **a)** 0,4 ; ☐ **b)** 40 ; ☐ **c)** 400 ; ☐ **d)** 4 ; ☐ **e)** 4×10^{-1} .

1 DEN 100 E KADAR SAYILARIN KARELERİ VE KÜPLERİ

Sayı	Karesi	Küpü	Sayı	Karesi	Küpü	Sayı	Karesi	Küpü	Sayı	Karesi	Küpü
1	1	1	26	676	17576	51	2601	132651	76	5776	438976
2	4	8	27	729	19683	52	2704	140608	77	5929	456533
3	9	27	28	784	21952	53	2809	148877	78	6084	474552
4	16	64	29	841	24389	54	2916	157464	79	6241	493039
5	25	125	30	900	27000	55	3025	166375	80	6400	512000
6	36	216	31	961	29791	56	3136	175616	81	6561	531441
7	49	343	32	1024	32768	57	3249	185193	82	6724	551368
8	64	512	33	1089	35937	58	3364	195112	83	6889	571787
9	81	729	34	1156	39304	59	3481	205379	84	7056	592704
10	100	1000	35	1225	42875	60	3600	216000	85	7225	614125
11	121	1331	36	1296	46656	61	3721	226981	86	7396	636056
12	144	1728	37	1369	50653	62	3844	238328	87	7569	658503
13	169	2197	38	1444	54872	63	3969	250047	88	7744	681472
14	196	2744	39	1521	59319	64	4096	262144	89	7921	704969
15	225	3375	40	1600	64000	65	4225	274625	90	8100	729000
16	256	4096	41	1681	68921	66	4356	287496	91	8281	753571
17	289	4913	42	1764	74088	67	4489	300763	92	8464	778688
18	324	5832	43	1849	79507	68	4624	314432	93	8649	804357
19	361	6859	44	1936	85184	69	4761	328509	94	8836	830584
20	400	8000	45	2025	91125	70	4900	343000	95	9025	857375
21	441	9261	46	2116	97336	71	5041	357911	96	9216	884736
22	484	10648	47	2209	103823	72	5184	373248	97	9409	912673
23	529	12167	48	2304	110592	73	5329	389017	98	9604	941192
24	576	13824	49	2401	117649	74	5476	405224	99	9801	970299
25	625	15625	50	2500	125000	75	5625	421875	100	10000	1000000

1 DEN 100 E KADAR SAYILARIN KAREKÖKLERİ

Sayı	Kare kökü	Sayı	Kare kökü	Sayı	Kare kökü	Sayı	Kare kökü
1	1,000	26	5,099	51	7,141	76	8,718
2	1,414	27	5,196	52	7,211	77	8,775
3	1,732	28	5,292	53	7,280	78	8,332
4	2,000	29	5,385	54	7,349	79	8,888
5	2,236	30	5,477	55	7,416	80	8,944
6	2,449	31	5,568	56	7,483	81	9,000
7	2,646	32	5,657	57	7,550	82	9,055
8	2,828	33	5,745	58	7,616	83	9,110
9	3,000	34	5,831	59	7,681	84	9,165
10	3,162	35	5,916	60	7,746	85	9,220
11	3,317	36	6,000	61	7,810	86	9,274
12	3,464	37	6,083	62	7,874	87	9,327
13	3,606	38	6,164	63	7,937	88	9,381
14	3,742	39	6,245	64	8,000	89	9,434
15	3,873	40	6,325	65	8,062	90	9,487
16	4,000	41	6,403	66	8,124	91	9,539
17	4,123	42	6,481	67	8,185	92	9,592
18	4,243	43	6,557	68	8,246	93	9,644
19	4,359	44	6,633	69	8,307	94	9,695
20	4,472	45	6,708	70	8,367	95	9,747
21	4,583	46	6,782	71	8,426	96	9,798
22	4,690	47	6,856	72	8,485	97	9,849
23	4,796	48	6,928	73	8,544	98	9,899
24	4,899	49	7,000	74	8,602	99	9,950
25	5,000	50	7,071	75	8,660	100	10,000

SÖZLÜK

1. Açı : Doğrusal olmayan ve başlangıç noktaları aynı olan iki ışının birleşiminin oluşturduğu şekildir.

2. Açısal bölge : Açı ile iç bölgesinin birleşiminden oluşan düzlem parçası.

3. Açıortay : Bir açısal bölgeyi, ölçümleri birbirine eşit olan iki açısal bölgeye ayıran ışın.

4. Açık önerme : Bilinmeyeni kapsayan bir bağıntıdır. $x-1 = 0$ ve $2x-1 > 0$ birer açık önermedir.

5. Alan : Bir yüzey parçasının ölçümü, bir yüzeye aynı türden bir birime göre karşı getirilen sayı.

6. Aritmetik orta : Sayılardan oluşan bir kümenin elemanları toplamının, bu elemanların sayısına bölümüdür.

7. Asal sayı : 1 ile kendisinden başka böleni olmayan sayıdır.

8. Ayrık kümeler : Ortak elemanları olmayan iki kümedir.

9. Bileşik önerme : Birkaç önermenin oluşturduğu önerme.

10. Birebir eşleme : İki kümenin elemanları arasında, bir elamana karşı bir eleman alınarak yapılan eşleme.

11. Birleşim işlemi : İki kümenin tüm elemanlarından oluşan kümenin bulunması işlemi.

12. Birleşim kümesi : İki kümenin ortak ve farklı olan tüm elemanlarından oluşan küme.

13. Birleşme Özeliği : Bir kümenin üç elemanı arasında yapılan bir işlemde, birlikte alınan herhangi iki eleman ile üçüncü elemana bu işlem uygulandığında, sonuç aynı olursa, bu özeliğe **birleşme özeliği** denir. Sözgelimi, doğalsayılar kümesinde a, b, c sayıları arasında yapılan toplama işleminde

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

eşitliği vardır. İşte buna toplamanın birleşme özeliği denir.

14. Boş küme : Elemanı olmayan kümedir.

15. Çembersel bölge (Daire) : Bir çember ile iç bölgesinin birleşiminden oluşan kümedir.

16. Çokgensel bölge : Bir çokgen ile iç bölgesinin birleşiminden oluşan kümedir.

17. Dağıtım özeliği (Dağılma özeliği) : Doğalsayılar kümesinde a, b, c elemanları arasında yapılan toplama ve çarpma işlemleri için

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

eşitliği yazılır. Buna çarpmanın toplama üzerinde **dağıtım özeliği** denir. Genel olarak, bir K kümesinde tanımlanan $\oplus$ ve $\otimes$ işlemleri için,

$$a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$$

eşitliği varsa, $\otimes$ nın $\oplus$ üzerinde dağılma özeliği vardır.

18. Değişme özeliği (Değiştokuş özeliği) : Bir kümenin iki elemanı arasında yapılan işlemde elemanlar yerlerini değiştirdiği zaman sonuç değişmezse, bu işlemin **değişme özeliği** vardır denir.
Örnek : Doğalsayılar kümesinde toplamanın değişme özeliği vardır.

$$a + b = b + a \quad \text{dır.}$$

19. Denk kümeler : Elemanlarının sayıları eşit olan kümeler.

20. Eşit kümeler : Aynı elemanlardan oluşan kümeler.

21. Etkisiz eleman : Bir işlemde etkisi olmayan eleman. Doğalsayılar kümesinde,

$$a + 0 = 0 + a = a \quad \text{dır.}$$

"0" sayısı toplama işleminde etkisiz elemandır.

22. Evrensel küme (Temel küme) : Üzerinde işlem yapılacak olan kümeleri, küme parçası olarak alan küme.

23. Frekans : Bir istitastik dizisinde bir elemanın kaç kez bulunduğunu gösteren sayı.

24. İkili : İki nesnenin oluşturduğu sıralı çift.

25. İkili işlem : Verilen bir kümenin iki elemanı arasında uygulanan bir işlemle bu kümenin yeni elemanının bulunması.

26. Birli işlem : Bir kümenin bir elemanından belli işlem ile, bu kümenin yeni elemanlarının bulunması.

27. İstatistik : Bilimlerin yararlandığı araştırma yöntemlerini kapsayan matematiğin dalı.

28. İstatistik grafiği : İstatistik ile ilgili bulguların anlaşılmasını sağlayan şekil.

29. Kapsama; Kapsanma : Bir kümenin başka bir küme içinde bulunması.
$A \subset B$: A kümesi, B içinde kapsanır.
$A \supset B$: B kümesi, A'yı kapsar.

30. Kapalılık özeliği : Bir kümenin elemanları arasında tanımlanan işlem ile bulunan elemanların tümünün bu kümenin elemanı olması.

31. Küme : Canlı, cansız varlıkların ve nesnelerin topluluğu.

32. İki kümenin birleşim işlemi : İki kümenin tüm elemanlarından oluşan kümenin bulunması.

33. İki kümenin kesişim işlemi : İki kümenin ortak elemanlarının oluşturduğu kümenin bulunması.

34. Küme parçası (Alt küme) : Bir kümenin elemanlarından oluşan küme.

35. Bir kümenin ayrım işlemi : Bir kümeyi ayrık küme parçalarına ayırmak.

36. İki kümenin farkı : A ile B kümelerinin farkı, A'dan bulunan B'de olmayan elemanlardan oluşan küme. Bu küme $A - B$ biçiminde gösterilir.

37. Matematik düzen (Sistem) : Bir küme ile bu kümenin elemanları arasında tanımlı olan bir işlem ya da işlemlerin tümü.

38. Medyan : Terimleri büyükten küçüğe ya da küçükten büyüğe doğru sıralanmış olan bir istatistik dizisinde ortada bulunan terim.

39. Mod : Bir istatistik dizisinde en çok tekrarlanan sayı.

40. Modüllü aritmetik : Saat aritmetiğinin doğalsayılara uygulanış biçimi.

41. Noktanın koordinatı : Sayı doğrusu üzerinde alınan bir noktaya karşı gelen sayı.

42. Noktanın koordinatları : Koordinatlar düzleminde alınan bir noktaya karşı gelen sıralı ikili.

43. Önerme : Kesin olarak doğru ya da yanlış bir yargıyı anlatan tümce.

44. Örnekleme : İstatistikte, bir olayın özeliklerini kapsayan örnekleri seçme yöntemi.

45. Rasyonel sayı : a ve b ($b \neq 0$), birer tamsayı olduğuna göre $\frac{a}{b}$ biçimindeki sayılar.

46. Rasyonel olmayan sayı : $\frac{a}{b}$ biçiminde gösterilemeyen sayı. $\sqrt{2}$ ve $\sqrt{3}$ rasyonel olmayan sayılardır.

47. Tamsayı : (a;b) biçiminde olan sayı. a ve b doğalsayılardır.

48. Ters eleman : Bir işlemle etkisiz elemanı veren iki eleman. O işleme göre biri öbürünün tersidir.

$$(+3) + (-3) = 0$$

eşitliğinde (-3) ile $(+3)$ toplamaya göre ters elemanlardır.

49. Üçgen : Doğrusal olmayan üç noktayı ikişer ikişer birleştiren doğru parçalarının birleşimi.

50. Üçgensel bölge : Bir üçgenle iç bölgesinin birleşimi olan düzlem parçası.